5/10 2012 {sem 1/2}.

(10) Maxwells fältekvationer (kap 7.3)

Våra lagar från tidigare:

$$\begin{cases} \nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} & \text{(Faradays lag)} \\ \nabla\times\vec H = \vec J & \text{(Amperés lag)} \\ \nabla\cdot\vec D = \rho & \text{(Gauss lag)} \\ \nabla\cdot\vec B = 0 & \text{(Flödeskonservering).} \end{cases}$$

Maxwell insåg att dessa ekvationer ej var kompletta. Kontinuitetsekvationen (5.1.3) ger $\nabla\cdot\vec J = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ är ej uppfylld!
Ty tag divergensen på Amperes lag:

$$0 = \nabla\cdot(\nabla\times\vec H) = \nabla\cdot\vec J \Leftarrow \text{Motsägelse!!!}$$

Gauss lag $\nabla\cdot\vec D = \rho$

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{=-\nabla\cdot\vec J} = \nabla\cdot\frac{\partial\vec D}{\partial t}$$

Modifierad version av Amperes lag

$$\boxed{\nabla\times\vec H = \vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t}}$$

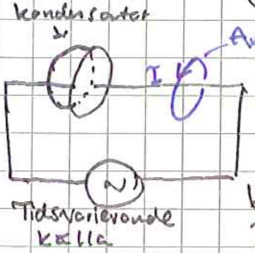
Notera kopplingen mellan $\vec H$ och $\vec D$ fält!

Anm. Den extra termen $\frac{\partial\vec D}{\partial t}$ fungerar som en strömtäthet, förskjutningsström.

Maxwells fältekvationer

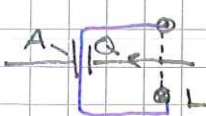
Diff. form	Integral form
$\nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t}$	$\oint_L \vec E\cdot d\vec l = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec B\cdot\hat n\, dS$
$\nabla\times\vec H = \vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t}$	$\oint_L \vec H\cdot d\vec l = \iint_S \left(\vec J + \frac{\partial\vec D}{\partial t}\right)\hat n\, dS$
$\nabla\cdot\vec D = \rho$	$\oiint_S \vec D\cdot\hat n\, dS = Q_{enc}$
$\nabla\cdot\vec B = 0$	$\oiint_S \vec B\cdot\hat n\, dS = 0$

Upplösning av skenbar paradox



(A) Före Maxwell: Amperés lag
$\oint_L \vec B\cdot d\vec l = \mu_0 I_{enc}$
(1) Om inneslutna strömmen beräknas genom "plan yta" $I_{enc} = I$; Ok!

(2) Om vi istället väljer en yta genom kondensatorn. Ingen ström korsas. $I_{enc} = 0 \Rightarrow$ ✗



(B) Efter Maxwell: Amperes modifierade lag $\oint_L \vec B\cdot d\vec l = \mu_0 I_{enc} + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial\vec E}{\partial t}\hat n\, dS$

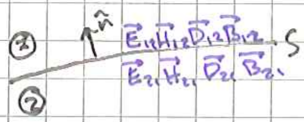
Elektriska fältet utanför kondensatorn är försumbart $\vec E = \vec 0$

Inuti kondensatorn $E = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{dQ}{dt} = \frac{I}{\varepsilon_0 A}$

(1) Om omslutna strömmen beräknas genom "plana ytan" så får vi
HL: $\mu_0 I_{enc} + \mu_0\varepsilon_0\iint \frac{\partial E}{\partial t}\hat n\, dS = \mu_0 I$

(2) En yta genom kondensatorn ger
$\underbrace{\mu_0 I_{enc}}_{=0} + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial\vec E}{\partial t}\cdot\hat n\, dS = \mu_0 I$

Randvillkor (7.3.6)



I: $\hat n\times\vec E_1 = \hat n\times\vec E_2$
($\vec E$-fältet tan komp. kont.)

II: $\hat n\cdot\vec D_1 = \hat n\cdot\vec D_2 + \rho_{sf}$
($\vec D$-fältets norm. komp.)

III: $\hat n\times\vec H_1 = \hat n\times\vec H_2 + \vec J_{sf}$
($\vec H$-fältets tangentialkomp.)

IV: $\hat n\cdot\vec B_1 = \hat n\cdot\vec B_2$
($\vec B$-fältets normalkomp. kont.)