System

Kap 1 Ett system S är en avbildning som avbilder objekt (insignal) på objekt (utsignal).

Vi skriver $S(\text{insignal}) = \text{utsignal}$

eller

$$\text{insignal} \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow \text{utsignal}$$

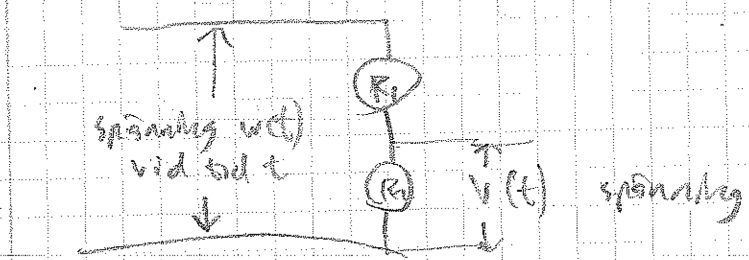
Där insignal och utsignal kan vara vad som helst, t.ex

tal a / funktion $w(t)$ / $\{a_0, a_1, a_2 \dots$

$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$ / matrisen

Uppgift Hitta utsignal för en given insignal

Ex 1.1



Bestäm $v(t)$ genom $w(t)$

Lösn Ohms lag ger ström $i(t) = \dfrac{w(t)}{R_1+R_2}$

$\therefore \ v(t) = i(t) \cdot R_2 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \cdot w(t)$

Vi får ett system med insignal $w(t)$ och utsignal $v(t)$. Systemet har kontinuerlig tid t, ty t varierar på ett intervall

Ex 1.2 Vi ska sätta in x_0 kr i ett bankkonto med ränta 2 %.

Det finns x_n kr på kontot efter n år.

Bestäm x_n.

Lösn. 0 år : x_0

efter 1 år: $x_1 = x_0 + x_0 \cdot 2\% = 1{,}02 \cdot x_0$

efter 2 år: $x_2 = 1{,}02 \cdot (1{,}02 \cdot x_0) = 1{,}02^2 \cdot x_0$

⋮

efter n år: $x_n = 1{,}02^n \, x_0$

Vi får ett system S

$S(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n \dots\}$

som har diskret tid

$n = 0, 1, 2, \dots$

Formelblad (formel 3.5)

$t^k e^{at}\theta(t)$ svarar mot $t^k \theta(t)$

$\frac{k!}{(s-a)^{k+1}}$ svarar mot

$\frac{k!}{s^{k+1}}, \ \sigma > 0$

Ex 1.3 Lös problemet

$$\begin{cases} y' = ay + w(t) \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

(a: del; w(t): en given funktion)

Obs Varje insignal $w(t)$ ger en utsignal $y(t)$. Så får vi ett system.

Lösn. $y' - ay = w(t)$

En integrerande faktor $e^{\int -a\,dt} = e^{-at}$

$\therefore \ (e^{-at} y)' = e^{-at} w(t), \quad \int_1^t (e^{-as} y(s))' \, ds = \int_1^t e^{-as} w(s)\, ds$

$\left[e^{-as} y(s) \right]_1^t = \int_1^t e^{-as} w(s)\, ds$

$e^{-at} y(t) - e^{-a} y(1) =$

$y(t) = e^{at} \cdot e^{-a} 3 + e^{at} \int_1^t e^{-as} w(s)\, ds$

Ex 1.4 Ekvationen

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}}_{v(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}}_{\text{konstant matris}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} w \\ y(t) = (c_1 \ c_2) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{D}_{\text{tal}} w(t) \end{cases}$$

dvs $\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{v}(t) = A\bar{v}(t) + Bw(t) \\ y(t) = C\bar{v}(t) + Dw(t) \end{cases}$

Vi får insignal $w(t) \xrightarrow{\text{medför}} \bar{v}(t) \longrightarrow$ utsignal $y(t)$

ett system

Ex 1.5 (Tidsdiskret system)

Antag att

rekursionsformel $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$

gäller för $k=1,2,3,\ldots$

Bestäm $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ för $k=1,2,3\ldots$

Lösn $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = AA\begin{pmatrix} x_{k-2} \\ y_{k-2} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_{k-2} \\ y_{k-2} \end{pmatrix} = A^3\begin{pmatrix} x_{k-3} \\ y_{k-3} \end{pmatrix} = \ldots$

$= A^k \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ för alla k

Problem Hur beräknar man $A^k\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$?

Lösningsmetod för en diagonaliserbar matris

A: $A_{2\times 2}$ är diagoniserbar $\Longleftrightarrow$ det finns två linjärt oberoende egenvektorer $\bar{s}_1$ och $\bar{s}_2$ med egenvärden λ_1 och λ_2 respektivt

$\therefore$ $A\bar{s}_1 = \lambda_1\bar{s}_1$ och $A\bar{s}_2 = \lambda_2\bar{s}_2$, där $\bar{s}_1 \neq 0$, $\bar{s}_2 \neq 0$

$\because$ $\bar{s}_1$ och $\bar{s}_2$ bildar en bas för $\mathbb{R}^2$ så finns det tal c_1 och c_2 så att $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = c_1\bar{s}_1 + c_2\bar{s}_2$

Som ger $A^k\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = A^k(c_1\bar{s}_1 + c_2\bar{s}_2) = c_1A^k\bar{s}_1 + c_2A^k\bar{s}_2$
$= c_1\lambda_1^k\bar{s}_1 + c_2\lambda_2^k\bar{s}_2$

$A^2\bar{s}_1 = A(A\bar{s}_1) = A\lambda^1\bar{s}_1 = \lambda^1(A\bar{s}_1) = \lambda_1\lambda_1 = \lambda^2\bar{s}_1$

Sats Om $A = A_{2\times2}$ är diagonaliserbar så har

$$\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_{k-1}\\y_{k-1}\end{pmatrix}$$ en allmän lösning

$$\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix} = c_1\lambda_1^k\bar{s}_1 + c_2\lambda_2^k\bar{s}_2$$

Ex 1.6 Lös
$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 6\\6 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{k-1}\\y_{k-1}\end{pmatrix}, \quad k=1,2\ldots\\ \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\23\end{pmatrix}\end{cases}$$

Lösn Egenvärde

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda+3 & -6\\-6 & \lambda-13\end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-13) - 36 =$$
$$\lambda^2 - 10\lambda - 75 = 0$$

$(\lambda-15)(\lambda+5) = 0$

$\lambda_1 = 15$ och $\lambda_2 = -5$

Egenvektorer:

För $\lambda_1 = 15$ löser vi $(\lambda_1 I - A)\underbrace{\begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix}}_{=\bar{s}_1} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}15+3 & -6\\-6 & 15-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \text{ dvs } \begin{cases}18s_1 - 6s_2 = 0\\-6s_1 + 2s_2 = 0\end{cases}$$

ledande koefficient

$$\begin{cases}18s_1 - 6s_2 = 0\\0 = 0\end{cases}$$

Sätt $s_2 = t$ så är $s_1 = \frac{6t}{18} = \frac{1}{3}t$

$\therefore$ lösning är $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix}s_1\\s_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{t}{3}\\t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}$

Skriv $\bar{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ som är egenvektor till A med $\lambda_1 = 15$

På samma sätt har vi $\bar{s}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ med $\lambda_2 = -5$

Klart att $\bar{s}_1$ och $\bar{s}_2$ är linjärt oberoende, ty $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Den allmänna lösningen är

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^k \bar{s}_1 + c_2 \lambda_2^k \bar{s}_2 = c_1 15^k \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 (-5)^k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Men $c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \end{pmatrix}$

dvs $\begin{cases} \frac{1}{3} c_1 - 3c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \overset{c_1}{\left(\frac{7}{3}\right)} 15^k \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \overset{c_2}{(2)} (-5)^k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$