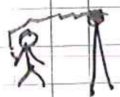
① 22/1-2013. Vad äter du till lunch? Fex. Sallad.

Slumpens Matematik.

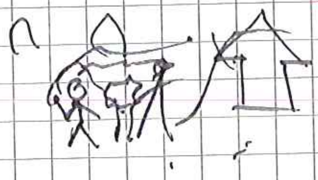
- Variation
- Hur länge fungerar en hårddisk?
- Störningar
- Deterministisk modell — $U = R \cdot I$, $F = m \cdot a$.

Slumpmodell $U = R \cdot I + E$.
E = slumpmässig störning.

Enkel modell:



Realistisk modell:



- Osäkerhet.

Additionssatsen

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$A \cap B$ tas 2 gånger

Binomialkoefficienter $\binom{n}{k}$, antalet sätt att dra k st bland n möjliga utan hänsyn till ordning.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{13}{2} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{12 \cdot 11!} = 78.$$

MR: 13 $\boxed{nCr}$ 2

Betingad Sannolikhet:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

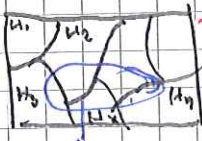
B är nytt utfallsrum.

$A \cap B$.

Ex! $P(\text{Båda är } \heartsuit) = P(H_1 \cap H_2) = \underbrace{P(H_2|H_1)}_{12/51} \cdot \underbrace{P(H_1)}_{13/52}$

$= \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{17}.$

SATSEN OM TOTAL SANNOLIKHET.



$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$

Ex: Rökare (ou).

M: Man $P(M) = 0,49$.
K: Kvinna $P(K) = 0,51$ $(K = M^*)$
R: Rökare $P(R|C) = 0,9$
C: Strupcancer
$P(R|M) = 0,139.$
$P(R|K) = 0,18.$

a) $P(R) = P(R|\underset{H_1}{M}) \cdot P(M) + P(R|\underset{H_2}{K}) \cdot P(K) =$

$= 0,139 \cdot 0,49 + 0,18 \cdot 0,51 = 0,160$

b) $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|C) \cdot P(C)}{P(R)} = \frac{0,9 \cdot 0,01}{0,16} = 0,056$

Om $P(A|B) = P(A)$ OBEROENDE HÄNDELSER.

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A \text{ o } B$ ober.

OBS!!!
Oförenliga.

$P(A|B) = 0 \neq P(A)$ {ej oberoende!

(1)
22/1
2013

Den klassiska sannolikhetsdefinitionen

Om ett försök kan utfalla på m möjliga sätt som alla är lika sannolika (har vi en *likformig* sannolikhetsfördelning) och en händelse A inträffar vid g st av dessa gäller

$$\boxed{P(A) = \frac{g}{m}}$$

Ex Dra ett kort ur en kortlek. Vad är sannolikheten att det är ett hjärter?

Lsg Det finns $m = 52$ kort varav $g = 13$ är hjärter så $P(\heartsuit) = 13/52 = 1/4$

Ex Dra två. Vad är sannolikheten att båda är hjärter?

Lsg Med lite kombinatorik blir det lite mer komplicerat

$$P(\text{båda } \heartsuit) = \frac{\text{Antal sätt att välja två } \heartsuit}{\text{Antal sätt att välja två kort}} = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

Betingad sannolikhet

Ex. För en tärning har vi $P(\text{Etta}) = 1/6$, men om vi vet att utfallet är udda får vi $P(\text{Etta om udda utfall}) = 1/3$.

Def. Den betingade sannolikheten att A skall inträffa om vi vet att B inträffat bet. $P(A \mid B)$ och definieras som

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Ur detta (och $P(B \mid A)$) får vi två räkneregler för $P(A \cap B)$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)}$$

Ex (igen) Dra två kort. Vad är sannolikheten att båda är hjärter?

Satsen om total sannolikhet

Om vi har n st händelser $H_1, \ldots, H_n$ som är

- Parvis oförenliga, dvs $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$
- Tillsammans täcker utfallsrummet, dvs $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

gäller för varje händelse A

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i)P(H_i)}$$

samt *"Konsten att vända en betingad sannolikhet"* eller **Bayes sats**

$$\boxed{P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{P(A)}}$$

Ex. Rökare

På vissa cigarettpaket står "9 av 10 som drabbas av strupcancer är rökare". Antag följande data: 49% av befolkningen är män. Av männen röker 13.9% och av kvinnorna 18% (2005). Sannolikheten att drabbas av strupcancer är 1%.

1. Vad är sannolikheten att en slumpvis vald person är rökare?
2. Vad är sannolikheten att få strupcancer om man är rökare?

Oberoende händelser

Om det visar sig att $P(A \mid B) = P(A)$, påverkas inte A av att B inträffat eller ej, de är oberoende. Detta kan med definitionen av betingad sannolikhet skrivas om som $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Def. Händelserna A och B är *oberoende* av varandra

$$\iff$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Obs. Skilj mellan *oberoende* och *oförenliga*. Kan två oberoende händelser vara oförenliga?

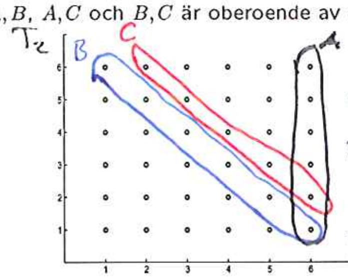
Ex Kasta två tärningar och låt

A = Första tärningen visar sexa

B = Summan är sju

C = Summan är åtta

Vilka av A, B, A, C och B, C är oberoende av varandra?



$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(C) = \frac{5}{36}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{36}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

Alla, ingen och någon

Om vi har n st *oberoende* händelser $A_1, \ldots, A_n$ kan vi räkna ut sannolikheten att

- alla inträffar
  $$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$
- ingen inträffar, dvs alla inträffar inte
  $$P(A_1^* \cap \cdots \cap A_n^*) = P(A_1^*) \cdot \ldots \cdot P(A_n^*) = = [1 - P(A_1)] \cdot \ldots \cdot [1 - P(A_n)]$$
- någon inträffar, dvs minst en, eller "inte ingen"
  $$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(A_1^* \cap \cdots \cap A_n^*) = = 1 - [1 - P(A_1)] \cdot \ldots \cdot [1 - P(A_n)]$$

Jämför gärna sista uttrycket med de på sid. F1 – 7.

Matematisk statistik – slumpens matematik

- Sannolikhetsteori – hur beskriver man slumpen?
- Statistikteori – vilka slutsatser kan man dra av ett datamaterial?

Grundläggande sannolikhetsteori

Grundläggande begrepp

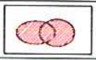
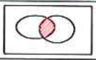
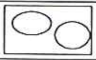
- *Utfall* – resultatet av ett slumpmässigt försök. Bet. $\omega_1, \omega_2, \ldots$
- *Händelse* – en samling av ett eller flera utfall. Bet. $A, B, \ldots$
- *Utfallsrum* – mängden av möjliga utfall. Bet Ω

Ex. Kasta en tärning.

- Utfallsrum $\Omega = \{1\text{:a}, 2\text{:a}, 3\text{:a}, 4\text{:a}, 5\text{:a}, 6\text{:a}\}$
- En händelse A : "Minst 4:a" $= \{4\text{:a}, 5\text{:a}, 6\text{:a}\}$
- B : "Högst 5:a" $= \{1\text{:a}, 2\text{:a}, 3\text{:a}, 4\text{:a}, 5\text{:a}\}$
- C : "3:a" $= \{3\text{:a}\}$

Ex. Kasta två tärningar.
Ej uppenbart hur man skall välja utfallsrum. T.ex.

- $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$. Totalt 36 utfall.
- Om man bara är intresserad av summan: $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. 11 utfall.

Händelser	Wenn-diag.	Mängdlära
Utfallsrummet Ω		Grundmängden
Händelsen A; A inträffar		Delmängden A
Komplementhändelsen. A^* till A; A inträffar ej		Komplementet $\complement A$ till A
Unionhändelsen $A \cup B$; A eller B eller båda inträffar		Unionen $A \cup B$
Snitthändelsen $A \cap B = AB$; både A och B inträffar		Snittet $A \cap B$
A och B *oförenliga* händelser; kan ej inträffa samtidigt		A och B disjunkta

Ex (kasta en tärning rep, forts)

- A : "Minst 4:a" $= \{4\text{:a}, 5\text{:a}, 6\text{:a}\}$
- B : "Högst 5:a" $= \{1\text{:a}, 2\text{:a}, 3\text{:a}, 4\text{:a}, 5\text{:a}\}$
- C : "3:a" $= \{3\text{:a}\}$

Några exempel på snitt och union

- $A \cap B = \{4\text{:a}, 5\text{:a}\}$
- $A \cup B = \Omega$
- $B \cap C = C = \{3\text{:a}\}$
- $A \cap C = \{\} = \emptyset$. Kan inte inträffa, eftersom A och C är oförenliga.

Sannolikhet

Sannolikheten att en händelse A skall inträffa bet. $P(A)$ (eng. *probability*).

En sannolikhet måste uppfylla följande, Kolmogorovs axiomsystem:

- $0 \le P(A) \le 1$ — En sannolikhet är ett tal mellan 0 och 1
- $P(\Omega) = 1$ — Sannolikheten att *något* skall hända
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ — *Om och endast* om A och B är oförenliga

Härur följer även t.ex.

$\boxed{\textbf{Komplementsatsen}\ P(A^*) = 1 - P(A).}$

Om det är slh 1/100 att vinna på ett lotteri är slh 99/100 att *inte* vinna.

$\boxed{\textbf{Additionssatsen}\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

Additionssatsen kan utökas till fler händelser, men blir snabbt ohanterlig

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\
&\quad - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\
&\quad - P(AB) - P(AC) - P(AD) - P(BC) - P(BD) - P(CD) \\
&\quad + P(ABC) + P(ABD) + P(ACD) + P(BCD) - P(ABCD)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C \cup D \cup E) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) \\
&\quad - P(AB) - P(AC) - P(AD) - P(AE) - P(BC) - P(BD) \\
&\quad - P(BE) - P(CD) - P(CE) - P(DE) + P(ABC) + P(ABD) \\
&\quad + P(ABE) + P(ACD) + P(ACE) + P(ADE) + P(BCD) \\
&\quad + P(BCE) + P(BDE) + P(CDE) - P(ABCD) - P(ABCE) \\
&\quad - P(ABDE) - P(ACDE) - P(BCDE) + P(ABCDE)
\end{aligned}$$

Frekvenstolkning av sannolikhet

Upprepa ett slumpmässigt försök n gånger

$$\frac{\text{Antal ggr } A \text{ inträffar}}{n} \to P(A), \quad n \to \infty$$

Ex Kasta tre tärningar 100 000 ggr och räkna ut relativa frekvensen treor i varje kast för var och en av tärningarna