3/9 - 2012 Elstatik

(1)

Elektriska fält (kap 2.1)

Två fundamentala begrepp: Källor och fält.
I elstatiken är den fundamentala källan den elektriska laddningen $\boxed{q}$ och fältet det elektriska fältet $\boxed{\vec{E}}$

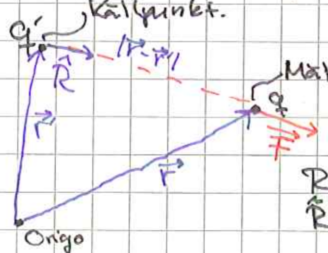
Två fundamentala egenskaper hos q.

I) Den uppträder endast i en multipel av $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C. {1 C = Coulomb = As}

$\boxed{q = n \cdot e}$, $n = \pm 1, 2, 3 \ldots$

II) Den totala elektriska laddningen är bevarad i ett slutet system, kan ej skapas eller förintas.

Coulombs lag för kraftverkan mellan två punktladdningar q, q' (kap 2.1.2)



$R = |\vec{r}-\vec{r}'|$

$\hat{R} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{R}$

Kraften $\vec{F}$ på laddningen q från laddningen q' är

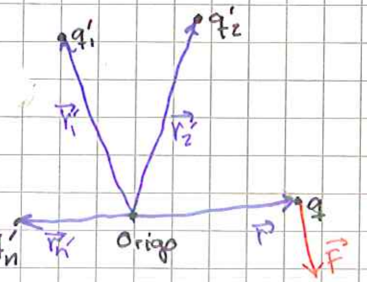
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{R^2}\hat{R}} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{R^3}$$

ε_0 = Vakuums permittivitet $= 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$

$qq' > 0$ - Repulsiv kraft.

$qq' < 0$ - Attraktiv.

Superpositionsprincipen gäller



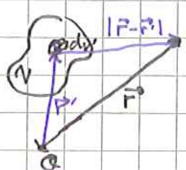
$$\vec{F}(\vec{r}) = \boxed{\sum_{i=1}^{n}\frac{qq_i'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i'}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}} = \boxed{q\vec{E}(\vec{r})}$$

Def: $\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i'}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|^3}$

Elektriskt fält i punkten $\vec{r}$ (kraft per enhetsladdning).

Kontinuerliga laddningsfördelningar (kap. 2.1.4).

I) Rymdladdningar



Rymdladdningstäthet

$\rho(\vec{r}')$: laddning/v.e.

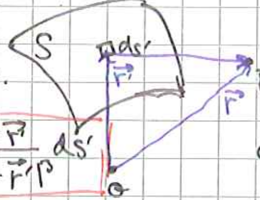
$dv' = dx'dy'dz'$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dv'}$$

II) Ytladdning

Ytladdningstäthet

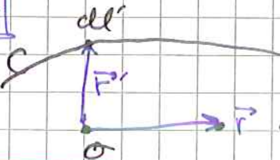
$\rho_s(\vec{r}')$: laddning/y.e.



$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \rho_s(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,ds'}$$

ds' - ytelement.

III) Linjeladdningar



Linjeladdningstäthet.

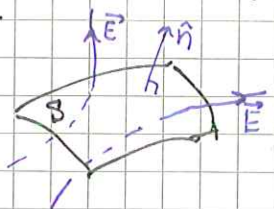
$\rho_l(\vec{r}')$ = laddning/l.e.

dl' - linjeelement

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \rho_l(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dl'}$$

Flöde Φ_E av $\vec{E}$ genom en yta S (öppen eller sluten) med ytnormal $\hat{n}$.

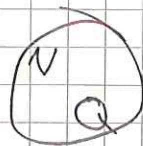
$$\Phi_E = \iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS$$



GAUSS LAG (bevis se bok. s. 68.)

Flödet av $\vec{E}$ genom en sluten yta S är lika med den totalt inneslutna laddningen Q/ε_0.

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = Q/\varepsilon_0}$$



Differentialform $\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0}$

ELEKTRISK POTENTIAL V (kap 2.2.4 & 2.3)

Det elektriska fältet $\vec{E}$ är rotationsfritt.

(visas i kap 2.2.4.)

$\boxed{\nabla\times\vec{E} = \vec{0}}$!!

SATS Om $\vec{E}$ är rotationsfritt i ett enkelt sammanhängande område V så existerar en potential V (ej entydig) så att $\vec{E} = -\nabla V$

V kallas fältets potential (bestämd på en konstant när).

Tangentlinjeintegralen av $\vec{E}$ längs en kurva som förbinder $\vec{a}$ och $\vec{b}$ beror endast på av potentialens värde i ändpunkterna

$$\boxed{\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V(\vec{a}) - V(\vec{b})}$$

Det är vanligt att lägga referenspunkt (jord, $V=0$) i oändligheten.

Vi noterar följande:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec r}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\nabla \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = -\frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3}$$

Potentialen från laddningsfördelningar

I) Rymdladdningar

$$\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec r') \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} dv' = -\nabla \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \rho(\vec r') \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} dv'\right]}_{V(\vec r)}$$

II) Ytladdningar

$$V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \rho_s(\vec r') \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} dS'$$

III) Linjeladdningar

$$V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \rho_\ell(\vec r') \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} dl'$$

IV) Punktladdningar

$$V(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec r - \vec r'|}$$

POISSONS EKVATION

$$\nabla \cdot \nabla V = \rho/\varepsilon_0 \Leftrightarrow \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0.$$