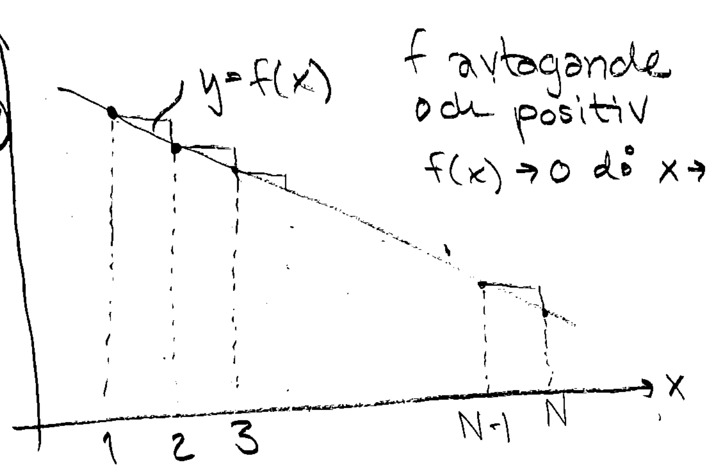
Föreläsning 9

5 Februari

reg.maths.lth.se

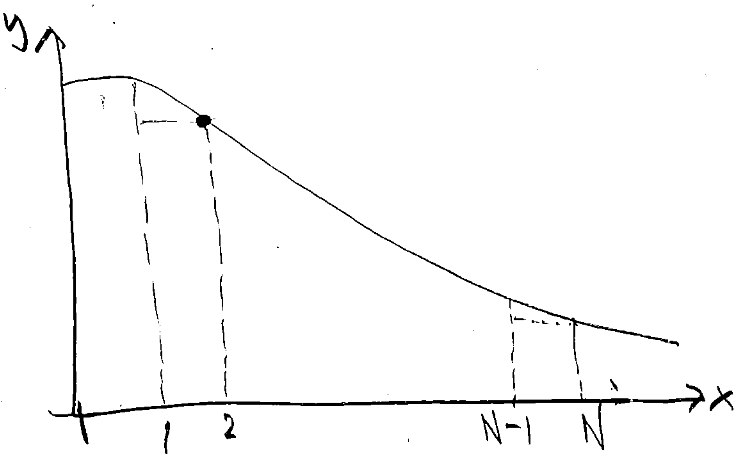
Integralkriteriet

$$\int_1^N f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{N-1} f(k) = \sum_{k=1}^{N} f(k) - f(N)$$



f avtagande och positiv

$f(x) \to 0$ då $x \to +\infty$



$$\int_1^N f(x)\,dx \ge \sum_{k=2}^{N} f(k) = \sum_{k=1}^{N} f(k) - f(1)$$

- Så $\int_1^N f(x)\,dx + f(N) \le \sum_{k=1}^{N} f(k) \le \int_1^N f(x)\,dx + f(1)$
- Detta ger att $\boxed{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ är konvergent} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} f(x) \text{ är konvergent}}$

Speciellt

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergent $\iff p>1$

Så $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergent $\iff p>1$

$\left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ divergent}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent}, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konvergent} \right]$

Ex. 14-01-07 ; 3C

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ln k}$$

$\frac{1}{k\ln k}$ avtar snabbare är $\frac{1}{k}$

$\frac{1}{k\ln k}$ avtar långsammare än $\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$

då $\dfrac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}} = \dfrac{x^{\varepsilon}}{\ln x} \to +\infty$ då $x \to +\infty$

Är integralen $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ konvergent?

$\frac{1}{x\ln x}$ är avtagande för stora x

Men: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \{u = \ln x\} = \left[\ln(\ln x)\right]_2^{+\infty} = "+\infty"$

dvs $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ är divergent

Så $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ln k}$ divergent enligt sats

---

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ← ej längre positiv

"kanske lättare för en sådan serie att vara konvergent"

"större svängningar"

$\underline{\text{Def}}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ är konvergent

Sats 5.21

Om $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ är konvergent så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergent

Bevis

Antag att a_k reella. $a_k \leq |a_k|$ så $0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a$

Jämförelsekriterie för positiva serier ger

$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + |a_k|$ konvergent om $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ konvergent

$a_k = (a_k + |a_k|) - |a_k|$ $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + |a_k|)$ konvergent och

$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ konvergent

Detta ger att $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergent

Om $a_k = x_k + iy_k$, där x_k och y_k är reella tal

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ konvergent $\&$ $\sum_{k=1}^{+\infty} y_k$ konvergent

$$\left.\begin{matrix} |x_k| \leq |a_k| \\ |y_k| \leq |a_k| \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \sum |x_k| \\ \sum |y_k| \end{matrix} \text{ konvergent}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \sum x_k \\ \sum y_k \end{matrix} \text{ konvergent}$$

$\Rightarrow \sum a_k$ konvergent

Ex. 5.22

Visa att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+i)^2}$ är konvergent.

Vi visar att serien är absolutkonvergent, vilket enligt sats kommer medföra att serien är konvergent, dvs

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|(k+i)^2|}$ konvergent

$$|(k+i)^2| = |k+i|^2 = k^2+1$$

Så $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|(k+i)^2|} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$ som är konvergent, ty $\frac{\frac{1}{k^2+1}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2+1} \to 1$ då $k \to +\infty$

Så $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$ konvergent eftersom $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent (ty p-serie med $p=2$)

Sats 5.23 Cauchy rottest

Antag att gränsvärdet $\rho = \lim_{k\to+\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ existerar

1) Om $\rho < 1$ så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ absolutkonvergent
2) Om $\rho > 1$ så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ divergent

Observera att satsen inte säger någonting om $\boxed{\text{fallet } \rho = 1}$.
Således gäller inte satsen för $\rho = 1$

Sats 5.24, d'Alemberts kvottest

Antag att gränsvärdet $L = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ existerar.

1) Om $L < 1$ så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ absolutkonvergent.

2) Om $L > 1$ så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ divergent.

Observera $L = 1$ säger inget

Ex. 5.25

Avgör om serierna a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 3^k}{k!}$, b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(2k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^k$ respektive c) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k e^{k(1+i)}}{4k}$ är konvergenta.

a) $(k^2)^{\frac{1}{k}} \to 1$

$(3^k)^{\frac{1}{k}} \to 3$

$(k!)^{\frac{1}{k}} \to ?$ Svårt att argumentera men $+\infty$

Vi använder kvottestet istället

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{(k+1)^2 \cdot 3^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^2 \cdot 3^k}{k!}} = \frac{(k+1)^2\, 3\, k!}{k^2 (k+1)!} = \frac{3(k+1)}{k^2} \to 0$$

där $\frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$

då $k \to +\infty$

Så d'Alemberts kvottest ger

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 3^k}{k!}$ är (absolut)konvergent

b) exponenten k skvallrar om Cauchys rottest:

$$|a_k|^{1/k} = |2k\ln(1+\tfrac{1}{k})| = 2\,\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{1/k} \to 2 \text{ då } k\to+\infty$$

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} \to \frac{1}{a}\Big|_{a=1} = 1 \text{ då } x\to 0\right)$$

Så $\sum_{k=1}^{+\infty} (2k\ln(1+\frac{1}{k}))^k$ divergent.

c) Vi testar med rotkriteriet: $|e^{1+i}| = |e|\cdot|e^{i}| = e\cdot 1 = e$

$$|a_k|^{1/k} = \left|\frac{ke^{k(1+i)}}{4^k}\right|^{1/k} = \underbrace{k^{1/k}}_{\to 1}\,\frac{|e^{1+i}|}{4} \to \underbrace{\frac{e}{4}}_{<1} \text{ då } k\to+\infty$$

Rotkriteriet säger att serien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{ke^{k(1+i)}}{4^k}$ är absolutkonvergent och därmed konvergent.

Ex. 5.26

Rot/kvotkriterierna säger inget om $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$

Def 5.30

En serie som sägas vara betinget konvergent om den är konvergent, men ej absolutkonvergent.

"Uppstår om termerna kancelleras"

Ex. Serien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ är konvergent, men ej absolutkonvergent!

Nästa föreläsning

jmf $\sum \frac{1}{k}$

Ex. 2013-08-28, 3

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k-\pi}$ divergent, ty termerna gör ej mot noll

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k}{k!}$ kvottest: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{4^k}{k!}} = \frac{4}{k+1} \to 0$ då $k \to +\infty$

så $\sum \frac{4^k}{k!}$ konvergent

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik}}{k^2+\ln k}$ tror den är konvergent för att vi kan jmf med p-serie på k^2 termen.

$\left|\frac{e^{ik}}{k^2+\ln k}\right| = \frac{1}{k^2+\ln k} \leq \frac{1}{k^2}$ så $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik}}{k^2+\ln k}$ absolutkonvergent och därmed konvergent.

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\overbrace{\frac{1}{k} - \sin\left(\frac{1}{k}\right)}^{\geq 0} \Big)$ Maclaurinutveckling av sin:

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + 5^x B(x) \Rightarrow x - \sin x = \frac{x^3}{6} + x^5 B(x)$

jmf gränsvärdesform $\frac{\frac{1}{k} - \sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k^3}} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k} B(1/k)}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{k^3}} \to 1$ då $k \to +\infty$

ger $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)$ konvergent, ty

$\sum \frac{1}{6}\frac{1}{k^3}$ konvergent (p-serie med $p=3$)