Föreläsning 8

3 februari

Kapitel 5 - Serier

Vi vet att $\frac{1}{3} = 0.33\overline{3}\ldots = 3\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{1}{100} + 3\cdot\frac{1}{1000} =$

$$= 3\cdot\frac{1}{10} + 3\cdot\frac{1}{10^2} + 3\cdot\frac{1}{10^3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 3\cdot\frac{1}{10^k}$$

"Kapar summan vid stora N"

Partialsumma:

$$\sum_{k=1}^{N} 3\cdot\frac{1}{10^k} \quad \text{Geometrisk summa } \left(\sum c r^k\right.$$

$$\sum_{k=1}^{N} 3\cdot\frac{1}{10^k} = \left\{\text{första termen} \cdot \frac{1 - \text{kvoten}^{\text{antal termer}}}{1 - \text{kvoten}}\right\} =$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^N}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^N\right)$$

Vi ser att $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} 3\cdot\frac{1}{10^k} = \frac{1}{3}$

Vi ska ta detta som definition för att serien $\sum_{k=1}^{+\infty} 3\cdot\frac{1}{10^k}$ är konvergent med värde $\frac{1}{3}$.

Definition 5.2

Låt (a_k) vara en talföljd. Vi säger att serien $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k)$ konvergerar om gränsvärdet $\lim\limits_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k$ existerar (ändligt)

Serier som inte är konvergenta sägs vara divergenta.

Ex. Geometrisk serie med kvot $r \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} Cr^k \text{ är konvergent} \iff |r|<1.$$

ex. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^k}$ konvergent ty $\left|\frac{1}{1+i}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

Dess värde är då $\dfrac{Cr}{1-r}$, $\boxed{\dfrac{\text{Första termen}}{1 - \text{kvoten}}}$

Ex (serie som inte är konvergent)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$ är divergent. Detta

bevisar vi genom partialsummorna.

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$> \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}}$$ "alla termer är större än den sista termen"

$$= N \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

Det gäller att $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$ så $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent

Positiva serier

Alla termer i serien är positiva.

Sats 5.8 - Divergenskriterium

Om $a_k \nrightarrow 0$ så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ divergent. Motsatsen gäller inte.

Ex 5.9

Serien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{2k+7}$ divergent ty $\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{2k+1}{2k+7} = \frac{2}{3} \neq 0$

"Första vi kollar om vi ska undersöka en serie"

Bevis

Låt $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$. Antag att $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ är konvergent

Då finns $S = \lim_{N \to +\infty} S_N$. Men då är även $S = \lim_{N \to +\infty} S_{N-1}$

Men $S_N - S_{N-1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1})$

$= a_N$

Så $\lim_{N \to +\infty} a_n = \lim_{N \to +\infty} (S_N - S_{N-1}) = S - S = 0$

"Om serien är konvergent kommer serien att konvergera mot noll"

Så: $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

$\Leftrightarrow \left(\lim_{k \to +\infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ divergent} \right)$

Sats 5.10

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+cb_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k+c\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$$

Om $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ och $\sum_{k=1}^{+\infty}b_k$ $\boxed{\text{konvergenta}}$

"Summeringen är linjär"

"En konvergent serie + en konvergent serie är konvergent"

Konvergent + Konvergent = Konvergent
Konvergent + Divergent = Divergent
Divergent + Divergent = ?

Ex. Den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ är divergens.

Alternativ till bokens bevis: Antag att $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ är konvergent $= S$.

$$S=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}>\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=S$$

Således måste $S>S$, vilket är en motsägelse.
Alltså är $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$ ej konvergent.

Termerna går inte tillräckligt snabbt mot noll för att konvergera.

Sats 5.11

Jämförelsetest för positiva serier:

Antag att $0 \leq a_k \leq b_k$

1) Om $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ konvergent så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergent

2) Om $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ är divergent så är $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ divergent

Bevis av 1) Antag $0 \leq a_k \leq b_k$ och $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ konvergent.

Låt $s_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$ Vi vet att $s_N \leq \sum_{k=1}^{N} b_k$

Men $\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} b_k$ existerar och $\sum_{k=1}^{N} b_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ eftersom $b_k \geq 0$.

Så $s_N \leq \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ så partialsummerna (s_N) är begränsad ovanifrån.

Dessutom är s_N växande, eftersom $a_k \geq 0$.

Från satsen igår får vi att $\lim_{N \to +\infty} s_N$ existerar ändligt, dvs $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ är konvergent!

Bevis av 2) Bevisas på motsvarande sätt som ovan.

Ex Visa att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent!

Observation: $0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

"delar med något mindre, tå något större"

$$\sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)$$

tar ut varandra —''— —''—

$$= 1 - \frac{1}{N}$$

Kallas för teleskoperande summa!

$$\text{Så: } \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1$$

<u>Men</u>: $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2$$

Detta visar att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent och $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$

I själva verket är $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Sats 5.13

Antag att $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ positiva serier

och att $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$

1) Om $L < +\infty$ och summa $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ är konvergent så är även $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konvergent.

2) Om $L > 0$ och $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ är divergent så är $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ divergent.

Bevisidé: Att $\frac{a_k}{b_k} \to L$ => Medför att det finns ett K så att $\frac{a_k}{b_k} < (L+\frac{1}{2})$ om $k > K$

Så för sådana k gäller $a_k < (L+\frac{1}{2})b_k$. Använd förra satsen.

Ex. 5.14

Undersök serien ① $\sum_{k=1}^{+\infty} (e^{\frac{1}{k}}-1)$, ② $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{2^k})$

"Undersök om de är konvergenta/divergenta"

① $e^{\frac{1}{k}} - 1 \geq 0$, gränsvärdet $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ då $x \to 0$

Således $\frac{e^{1/k}-1}{\frac{1}{k}} \to 1$ då $k \to \infty$

$\sum \frac{1}{k}$ divergent så $\sum (e^{1/k}-1)$ också divergent

② $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $x \to 0$ $\quad \frac{\sin(\frac{1}{2^k})}{1/2^k} \to 1$ $\quad \sum \frac{1}{2^k}$ konvergent

=> $\sum \sin(\frac{1}{2^k})$ konvergent