Föreläsning 7

2 Februari

Kapitel 4 - Talföljder & Rekursionsekvationer

$1, 2, 3, 4, \ldots \quad (a_n), \quad a_n = n$

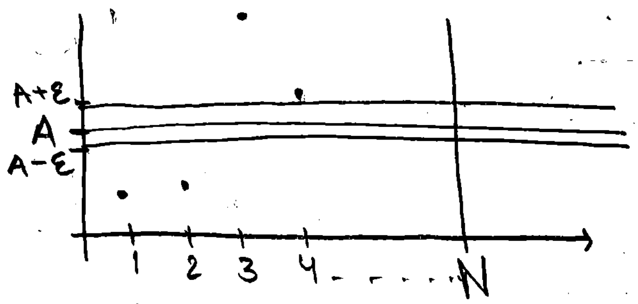
$2, 3, 5, 7, 11, \ldots \quad (a_n), \quad a_n =$ n:te primtalet

$1, -1, 1, -1, 1, -1 \ldots \quad (a_n), \quad a_n = (-1)^{n-1}$

Def 4.1

Talföljden (a_n) säges ha gränsvärde A om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ~~ett~~ heltal $N \in \mathbb{N}$ så att

$$n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$



Ex 4.2

För $a_n = \frac{n-1}{n}$ gäller $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1 \quad \left(a_n = 1 - \frac{1}{n}\right)$

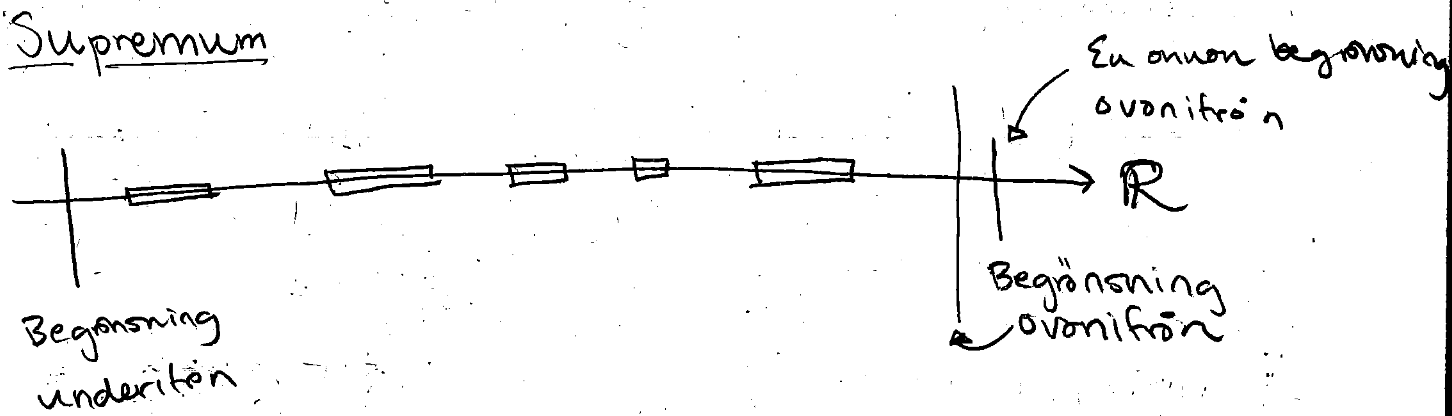
Ex

För $a_n = (-1)^{n+1}$ saknas gränsvärde

Ex

$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$ "$+\infty^0$" Farligt fall $\quad | \quad n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \to e^0 = 1$ då $n \to +\infty$

Supremum



"Supremum - minsta övre begränsning"

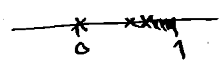
Def

Låt $M \subset \mathbb{R}$. Om M är uppåt begränsad så definerar vi supremum av M, $\sup M$, som det minsta tal x sådant att $x \geq a$ för alla $a \in M$.

Om M ej är övre begränsad så låter vi $\sup M = +\infty$

Ex. $\sup[0,1] = 1$, $\sup[0,1) = 1$

$\sup\{1-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = 1$

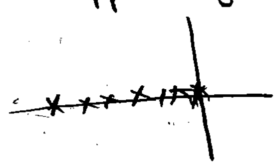


Axiom

Varje uppåt begränsad mängd har supremum.

Ex.

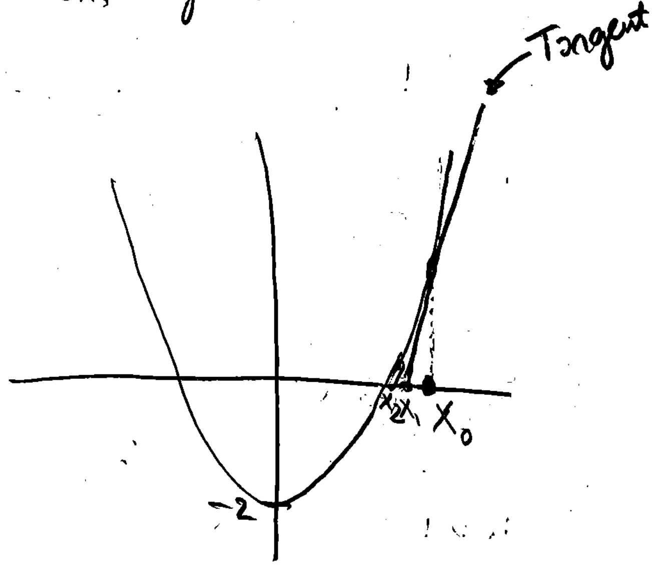
$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (Visa att $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - växande - uppåt begränsad)



Sats 4.6

Varje växande, uppåt begränsad talföljd har gränsvärde.

Hur löser vi $x^2 = 2$? $x = \pm\sqrt{2}$ "Blir vi gladare av detta?"



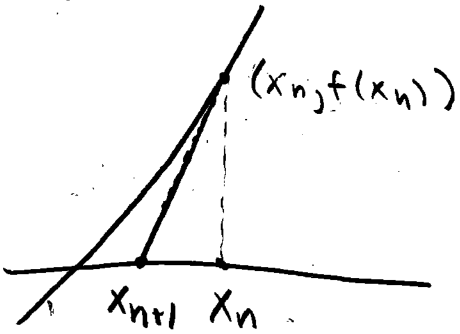
__Newtons-Raphsons metod__

Numerisk lösning av ekvationer

$f(x)=0$. Här är $f(x)=x^2-2$

Vi gissar x_0.

__Algebraiskt__



$$\frac{0-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n} = f'(x_n)$$

ger

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

som ger talföljd (x_n)

Konvergensen måste undersökas!

Med $f(x)=x^2-2$ $f'(x)=2x$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\Big(\underbrace{x_n}_{a} + \underbrace{\dfrac{2}{x_n}}_{b}\Big) \end{cases}$$

Motsvaren till sats 4.6

"Varje avtagande, nedåt begränsad talföljd har gränsvärde"

$a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \iff (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$

Så $x_{n+1} \geq \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{\cancel{x_n} \cdot \frac{2}{\cancel{x_n}}} = \sqrt{2} \iff x_{n+1} = \sqrt{2}$

$\boxed{\text{Så } (x_n) \text{ begränsad underifrån } \geq 2}$

$x_{n+1} - x_n \leq 0$: vill visa $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n^2-2}{2x_n} \leq 0$ vsv.

$\boxed{\text{Så } (x_n) \text{ avtagande.}}$ $\Rightarrow$ pga sats (x_n) kommer konvergera

$x_n \to X$ för något X $x_{n+1} \to X$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

$\downarrow$

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \iff x^2 = 2$$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \end{cases}$$ har lösning: $x_n = \sqrt{2}\,\dfrac{1 + (3+2\sqrt{2})^{-2^{n-1}}}{1 - (3+2\sqrt{2})^{-2^{n-1}}}$

Ex 4.9

$a_0 = A$, $a_n = r \cdot a_{n-1}$

$a_1 = r a_0 = r A$

$a_2 = r \cdot a_1 = r^2 A$

$a_n = r^n \cdot A$

Ex 4.10

$a_0 = 1$

$a_n = n \cdot a_{n-1}$

$a_1 = 1 \cdot a_0 = 1$

$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1$

$a_3 = 3 a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$a_n = n(n-1)(n-2) \ldots = n!$

Ex. 4.11 Vi lånar 200 000 kr till 6% årlig ränta men räntan ackumuleras månadsvis, dvs betalar 0.5% /månad. Antag dessutom att du betalar tillbaka 2000 kr varje månad.

Låt x_n beteckna lånets storlek efter n månader (tkr)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0.005 x_n - 2 = 1.005 x_n - 2 \\ x_0 = 200 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1{,}005x_n - 2 \\ x_0 = 200 \end{cases}$$

Sök formel för x_n.

Vi löser först den homogena ekvationen:

$x_{n+1} - 1.005\, x_n = 0$

Denna har lösning $x_n^h = A \cdot (1.005)^n$ homogen

Vi hittar sedan en partikulärlösning till $x_{n+1} - 1.005 x_n = -2$

Ansätter $x_n^p = B$ (då högerledet är en konstant)
för hela talföljden

$x_{n+1}^p - 1.005 x_n^p = -2 \Leftrightarrow B - 1.005B = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -0.005B = -2 \Leftrightarrow B = 400$

$x_n = x_n^h + x_n^p = A \cdot (1.005)^n + 400$

$n = 0$ ger

$200 = x_0 = A + 400 \Leftrightarrow A = -200$

$x_n = -200 \cdot (1{,}005)^n + 400$, För $x_n = 0$ då $138 < n < 139$ månader

Betalar ca 278 000 kr.

Ex. Lös $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ $(y'' - 5y' + 6y) = 0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$ Karakteristiskt polynom

$(r - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}$

$r = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow r_1 = 3 \; r_2 = 2$

Sats: $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

Ex 4.16)

$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4n+1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$

Inhomogen. => Dela upp

Homogen lös av $x_n^h = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

Partikulär lösning: HL = polynom av grad 1

Ansätt $x_n^p = an + b$ $x_{n+1}^p = a(n+1) + b$, $x_{n+2}^p = a(n+2) + b$

$x_{n+2}^p - 5x_{n+1}^p + 6x_n^p = 4n+1 \Leftrightarrow a(n+2) + b - 5(a(n+1) + b) + 6(an+b) = 4n+1 \Leftrightarrow n(a - 5a + 6a) + 2a + b - 5a - 5b + 6b = 4n+1$

$$\begin{cases} a - 5a + 6a = 4 \\ 2a + b - 5a - 5b + 6b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ -3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_n^p = 2n + \frac{7}{2}$ är partikulärlösning

$\Rightarrow$ Allmänna lösningen: $x_n = x_n^p + x_n^h = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + 2n + \frac{7}{2}$

A och B bestäms med $x_0 = 1$ och $x_1 = 2$

Ex. 4.17

$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$

$x_n^h = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$

Vi skulle vilja ansätta

$x_n^p = a \cdot 2^n$

Ansätt istället $x_n^p = a \cdot n \cdot 2^n$

Ex. 4.18

$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n2^n$

Karakteristiskt polynom $r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2$ så $r_1 = r_2 = 2$, dubbelrot

$x_n^h = A \cdot 2^n + Bn \cdot 2^n = (A + Bn) \cdot 2^n$

Vi skulle vilja ansätta $x_n^p = (a + bn) \cdot 2^n$ då vi har samma form på x_n^h och x_n^p måste vi multiplicera x_n^p med n^2.

$\Rightarrow x_n^p = (a + bn)n^2 \cdot 2^n$

Räcker inte med $(a\underline{n} + bn^2)2^n$ då det finns ett $\underline{n}$ i x_n^h.

Ex 4.13

$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, $x_0 = x_1 = 1$

$r^2 - 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \pm i$

$x_n^h = A(1+i)^n + B(1-i)^n$ "kommer bli någon typ av slseckning av i"

$= A(\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}})^n + B(\sqrt{2}\, e^{-\frac{i\pi}{4}})^n$

Skriv om till cos/sin {Svara i cos/sin på inlämningsuppgiften.}