Föreläsning 4

26 januari

Kapitel 3: Integralkalkyl

Enklaste varianten: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Dela upp f i real- och imaginärdelar:

$f = u + iv$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (u(t) + iv(t))\,dt \overset{\text{Def}}{=} \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

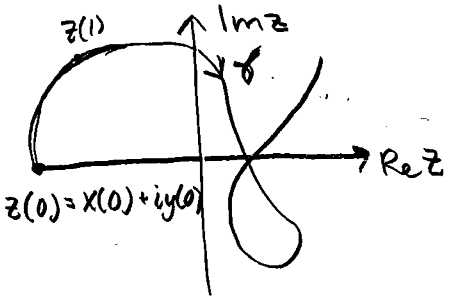
Ex. $$\int_0^1 (t+i)^2\,dt = \int_0^1 (t^2-1)\,dt + i\int_0^1 2t\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^1 + i\left[t^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + i$$

I praktiken delar man inte upp i Re- och Im-del

Alt. $$\int_0^1 (t+i)^2\,dt = \left[\frac{(t+i)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{(1+i)^3}{3} - \frac{i^3}{3} = \frac{1}{3}(1+3i-3) = -\frac{2}{3}+i$$

De intressantaste typerna är kurvintegraler



Kurvor parametriseras oftast av tiden, t.

En kurva är en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Kräver kontinuerlitet, men det räcker inte

Vi måste kräva att $z(t)$ (eller $x(t), y(t)$) är C^1-funktioner (och $z'(t) \neq 0$)

styckvis

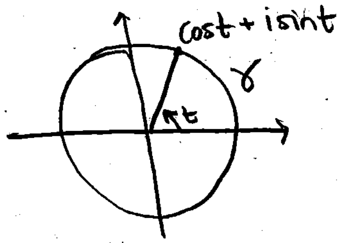
Givet en kurva γ (med parametrisering $z(t) = x(t) + iy(t)$), $\alpha \le t \le \beta$

en funktion $f(z)$, vad ska vi mena med

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta \underbrace{f(z(t))\,z'(t)}_{\text{komplexvärd funktion av reell variabel}}\,dt$$

Finns oändligt många parametriseringar av kurvan.

Ex. Låt $f(z) = z^n$ (där n heltal) och γ är enhetscirkeln



Positivt orienterad vid slutna kurvor. "Området till vänster"

$$\cos t + i\sin t = e^{it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

dvs. $z(t) = e^{it}$, $z'(t) = i \cdot e^{it}$

$$\int_\gamma z^n dz = \int_0^{2\pi} f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n \cdot i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt =$$

$n \neq -1$

$$= \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Men om $n = -1$ blir det istället: $\int_0^{2\pi} i e^{i(n+1)t} dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$

$$\text{dvs. } \int_\gamma z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{om } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{om } n = -1 \end{cases}$$

"Integraler med avseende på båglängd"

$$\int_\gamma f(z)|dz| \overset{def}{=} \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot |z'(t)|\, dt$$

Specialfall: $f(z) = 1$ Integrerar farten

$$\int_\gamma 1\, |dz| = \int_\alpha^\beta 1 \cdot |z'(t)|\, dt = \text{Längden av kurvan, } l(\gamma)$$

"ML-olikheten": Om γ är styckvis slät kurva, och f är en kontinuerlig funktion, som uppfyller att $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in \gamma$

"Vi har alltid ett max värde, men vi vet inte exakt"

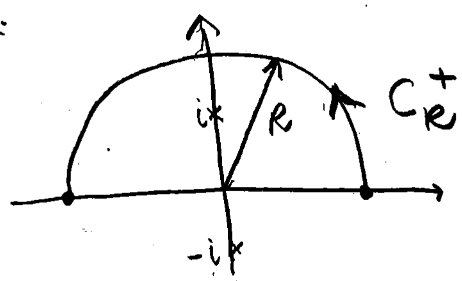
Då $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M \cdot L$ där $L = l(\gamma)$ är längden av γ

Bevis:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)dt\right| \overset{\text{Triangelolikheten}}{\leq} \int_\alpha^\beta \underbrace{|f(z(t))|}_{\leq M}|z'(t)|\,dt$$

$$\leq \int_\alpha^\beta M \cdot |z'(t)|\,dt = M \cdot L$$

Ex.



$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

Väljer en stor cirkel så man undviker punkterna där $f(z)$ ej är definerad

Visa att $\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R^+} \frac{1}{z^2+1}dz\right) = 0$

$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{4}{R^2}$ om R stort (sats 2.9)

$$\left|\int_{C_R^+} \frac{1}{z^2+1}dz\right| \leq \max_{z\in C_R^+}|f(z)| \cdot \underbrace{\pi R}_{L}$$

$$\leq \frac{4}{R^2} \cdot \pi R = \frac{4\pi}{R} \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

Primitiva funktioner

Anta att f är definerad på $\Omega \in \mathbb{C}$

En primitiv funktion är en funktion F, också def på Ω, sådan att $F' = f$ (på hela Ω)

Stora F' är en holomorf

$\Rightarrow$ Om f har en primitiv funktion är den en holomorf funktion

OBS! Endast holomorfa funktioner kan ha en primitiv funktion

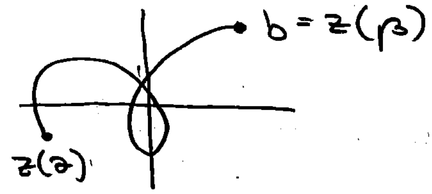
Ex. $f(z) = z^2 \quad F(z) = \frac{1}{3}z^3$

$g(z) = e^{2z} \quad G(z) = \frac{1}{2}e^{2z}$

$h(z) = \frac{1}{z^2} \quad H(z) = -\frac{1}{z}$ ← Inte holomorf på hela Ω. Men om vi arbetar på ett område som inte innehåller origo så är det coolt!

Om vi kan hitta en primitiv, är $\int_\gamma f(z)\,dz$, lött att beräkna

nämligen $\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$



Bevis:

$$\frac{d}{dt}(F(z(t))) = F'(z(t)) \cdot z'(t) = f(z(t)) \cdot z'(t)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(F(z(t)))\,dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha))$$

$= F(b) - F(a)$

Om kurvan är sluten, dvs om start- och slutpunkt sammanfaller fås ett specialfall:

Om γ sluten och f har en primitiv F är $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

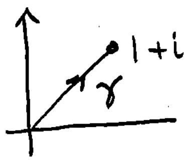
$\frac{1}{z}$ har en primitiv $\mathrm{Log}(z)$ <u>men</u> den är inte definierad överallt.

Detta ger ett alternativt sätt att visa att

1) $\int_{|z|=1} z^n\,dz = 0$ för $n \neq -1$

2) $f(z) = \frac{1}{z}$ <u>inte</u> har någon primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Ex. $\int_\gamma z e^z\,dz$ där



- parametrisera linjen
  $z(t) = 0 + t(1+i)$ riktningsvektor $\quad 0 \le t \le 1$
  sätt in i integralen och lös.

- Hitta en primitivfunktion partialintegrering
  $F(z) = ze^z - e^z$
  $\int_\gamma f(z)\,dz = F(1+i) - F(0) = \dots$

Exempel 3.13 Nyttigt