Föreläsning 3

22 januari

$V(x,y) = x^3 - y^3$

Def

$g(x,y)$ harmonisk $\Leftrightarrow g''_{xx} + g''_{yy} = 0$
$\in C^2$

Exponentialfunktionen

För $z = x+iy$ definierar vi exponentialfunktionen e^z ($\exp(z)$) $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

- [endim: $e^{it} = \cos t + i\sin t$
  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$]

- $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Sats 2.10

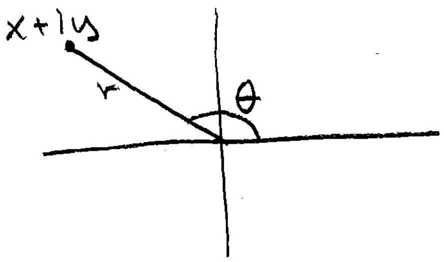
Exponentialfunktionen $z \to e^z$ är holomorf på hela $\mathbb{C}$.
Dessutom är $(e^z)' = e^z$

Koll: $u(x,y) = e^x\cos y$ $\quad u'_x = e^x\cos y$ $\quad u'_y = -e^x\sin y$
$v(x,y) = e^x\sin y$ $\quad v'_y = e^x\cos y$ $\quad v'_x = e^x\sin y$

CR är uppfylld $z \to e^z$ är holomorf

- En representation: $f' = u'_x + iv'_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z$

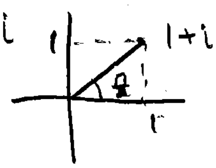
- Komplexa tal på polär form:



$x+iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

θ kallas ett argument av z, betecknas $\arg z$.
$\arg z$ är inte entydlig, vi kan addera hela varv

Ex. $z = 1+i$

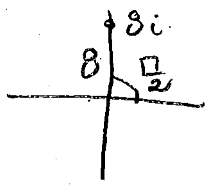


$z = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+2n\pi)}$ $n \in \mathbb{Z}$

$\arg z = \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

Ex. Lös $z^3 = 8i$

Vi skriver $8i$ på polär form

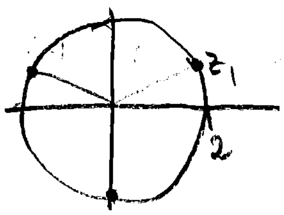


$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

z på polär form: $z = re^{i\theta}$

Då är $z^3 = r^3e^{i3\theta}$ så $r^3e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}n\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

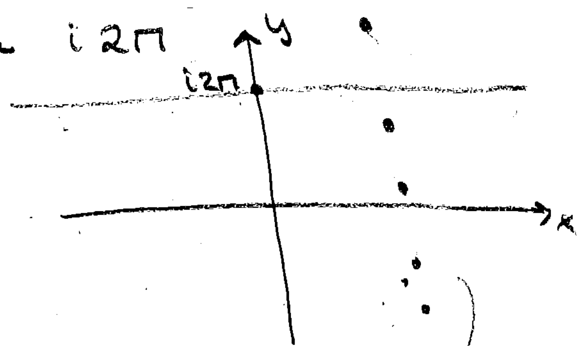


$z_1 = \sqrt{3} + i$

$z_2 = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = -2i$

$z \to e^z$ är periodisk med perioden $i2\pi$



periodisk i den riktningen

Def Med <u>en</u> logaritm av $z (\neq 0)$ menas ett komplext tal w så att $e^w = z$

"Har vi hittat ett w kan vi hitta många flera"

OBS! Ej entydligt!

Om $w = a + ib$ och $z = re^{i\theta} = |z| e^{i\theta}$

Så ska det gälla att $e^w = z$, dvs. $e^a \cdot e^{ib} = |z| e^{i\theta}$

dvs $e^a = |z|$

$b = \theta + 2\pi n$ ngt $n \in \mathbb{Z}$

Så $a = \ln|z|$ och $b = \arg z$. Med andra ord är

$w = \ln|z| + i \arg z$

Varje val av argumentet z ger upphov till en logaritm av z. Samtliga logaritmer av z betecknas $\log z$, och $\boxed{\log z = \ln|z| + i \arg z}$

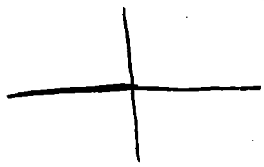
OBS! $z \to \log z$ är <u>ingen</u> funktion!

Vägen ut: Välj argument, $\arg z$, en gång för alla. Finns några standardval. "Man väljer en <u>gren</u> av argumentfunktionen"

<u>Principalgrenen</u>

$\operatorname{Arg} z =$ det val av $\arg z$ som uppfyller $-\pi < \arg z < \pi$

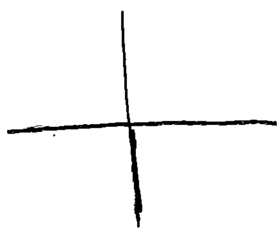
Definierad överallt utom på <u>röda</u> linjen.



$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$

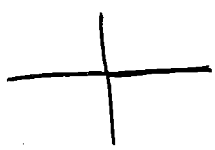
<u>Texasgrenen</u>

$\arg_T z$ uppfyller $-\frac{\pi}{2} < \arg_T z < \frac{3\pi}{2}$



<u>Naturliga grenen</u>

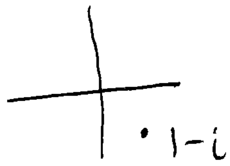
$\arg_n z$ uppfyller $0 < \arg_n z < 2\pi$



Tack vare att vi tar bort så är den kontinuerlig. Man kan ta med, men då får man en diskontinuitet

Ex. Beräkna principallogaritmen $\text{Log}(1-i)$, $\log_T(1-i)$ och $\log_n(1-i)$

$$\log(1-i) = \ln|1-i| + i\arg(1-i) = \ln(\sqrt{2}) + i\arg(1-i)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + i\arg(1-i)$$



$$\text{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\,\text{Arg}(1-i) =$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$$

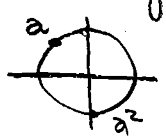
$$\log_T(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}$$
$$\log_n(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{7\pi}{4}$$

Valet kommer spela roll senare i kursen.

Varning. ex.

Varning för logaritmlagar:

$a = e^{\frac{3i\pi}{4}}$



"Flyttat över linjen"

$$\text{Log}\,a = \underbrace{\ln|a|}_{\text{0, ty i enhetscirkeln}} + i\,\text{Arg}\,a = 0 + i\frac{3\pi}{4} = i\frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Log}(a^2) = \text{Log}\left(e^{3i\frac{\pi}{2}}\right) = \underbrace{\ln\left|e^{\frac{3i\pi}{2}}\right|}_{0} + i\,\text{Arg}\left(e^{i3\pi/2}\right) = \; = i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -$$

$$2\,\text{Log}\,a \neq \text{Log}(a^2)$$

"Problemet var att vi har hoppat över det röda strecket när vi kvadrerade"

Sats 2.14

$z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ är holomorf på sin definitionsmängd

$$(\mathrm{Log}\, z)' = \frac{1}{z}$$

Bevisidé

Låt $w_1 = \mathrm{Log}\, z_1$, $w_2 = \mathrm{Log}\, z_2$

$$\frac{\mathrm{Log}\, z_1 - \mathrm{Log}\, z_2}{z_1 - z_2} = \frac{w_1 - w_2}{e^{w_1} - e^{w_2}} \xrightarrow{z_2 \to z_1} \frac{1}{(e^{w_1})'} = \frac{1}{e^{w_1}} = \frac{1}{z_1}$$

Def

Vi definierar z^α, $z \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ som
$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$

OBS! z^α blir ej entydligt bestämd i allmänhet

Ex. (2013-03-12, 2a)
Bestäm alla möjliga värden till
- $(-1)^3$
- $(-1)^{1/3}$

- $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$

$$(-1)^3 = e^{3\log(-1)} = e^{3(\underbrace{\ln|-1|}_{=0} + i\arg(-1))} = e^{3(i(\pi + 2n\pi))} =$$
$$= \underbrace{e^{3i\pi}}_{-1} \cdot \underbrace{e^{6in\pi}}_{1} = -1$$

- $(-1)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\log(-1)} = e^{\frac{1}{3}(\ln|-1| + i\arg(-1))} = e^{\frac{1}{3}(i\pi + i2n\pi)}$

$n=0$: $e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$n=1$: $e^{i\pi} = -1$

$n=2$: $e^{\frac{i5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

OBS! $z = (-1)^{1/3}$ $z^3 = -1$

$\Rightarrow$ Tre lösningar

Ex. (2.16)

Bestäm alla möjliga värden för i^i.

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i(\underbrace{\ln|i|}_{=0} + i\arg(i))} = e^{-\arg(i)}$$

$$= e^{-(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Så $i^i \in \mathbb{R}$!

<u>Def</u> Trigonometriska funktioner

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Alla är holomorfa där de är definierade, cos och sin definierade överallt och tan överallt bortsett från där cos är noll.

Ex. (2014-03-11, 2a, jfr 2.17)

Lös $\tan z = 3i$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \cdot \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$$ sätt $w = e^{iz}$

$$\Rightarrow -i \cdot \frac{w-\frac{1}{w}}{w+\frac{1}{w}} = 3i$$ Polynomekvation i w!

GÖR KLART!