Föreläsning 3

Faktorsatsen

För polynomet $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ gäller $p(\alpha) = 0 \iff x-\alpha$ är en faktor till polynomet $p(x)$

dvs. $p(x) = (x-\alpha)\cdot q(x)$ för något polynom $q(x)$.

Ex. Antag att vi vet att $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ har en rot $x = 1$.

Lös ekvationen fullständigt. $x-1$ är en faktor till VL $p(x)$

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{1}{l}{x^2} & \\
\hline
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x-1 \\
\hline
-(x^3 - x^2) & \\
\hline
-5x^2 + 11x - 6 & \\
-(5x^2 + 5x) & \\
\hline
(6x - 6) & \\
-(6x - 6) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$p(x) = x^2 - 5x + 6$

$(x-1) + 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

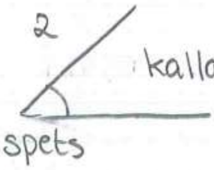
Kapitel P Plan Geometri

Matematisk teori byggs upp av defenitioner, axiom och satser.

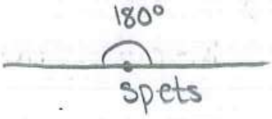
Där definitionen - vad objekt betyder

axiom - påstående som accepteras utan bevis

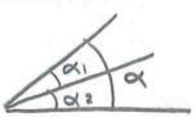
sats - påstående som får användas efter bevis.

Def 2 

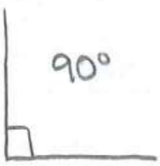
kallas vinkel

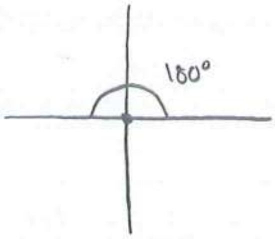
Def. 3 

sägs vara 180°

Axiom 1 

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$



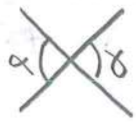


$\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

axiom 1 ger $\alpha + \alpha = 180^\circ$

Def 3 

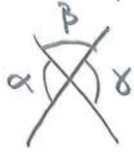
① $\alpha + \beta$ kallas för sidovinklar
$\alpha + \beta = 180^\circ$

② 

α och γ kallas vertikalvinklar

Vertikalvinklar är lika stora

Bevis för ② inför vinkeln β

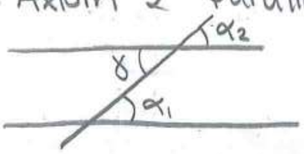


Så är $\beta + \gamma = 180^\circ$ och $\alpha + \beta = 180^\circ$ $\quad \gamma = \alpha$

Som ger $\gamma = 180^\circ - \beta \quad \alpha = 180^\circ - \beta$

#

Axiom 2 Parallellaxiomet



2 räta parallella linjer

Sats: Linjerna är endast parallella om γ och α_1 är lika stora.

Föreläsning 4 Kapitel 3

3,1–3,3 Ekvationer

Lös ekvationen $4x+3=2x+7$ Lösning: $2x=4 \Leftrightarrow x=2$
ekvivalens i varje steg.

Lös $x^3=x$ Lösning $x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0$

$x_1=0 \quad x_2=1 \quad x_3=-1$

Kommentar: Varje faktor ger en lösning.
Förkorta aldrig bort ett x.
Blir ej ekvivalens.

Ex. Lös $\sqrt{x+1}+x=5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=5-x \Rightarrow x+1=(5-x)^2$

$\Leftrightarrow x+1=25-10x+x^2 \Leftrightarrow x^2-11x+24=0$

$x_1=8 \quad x_2=3$ ges av pq formeln

Verifiering ① För $x=8$ gäller $VL=\sqrt{8+1}+8=11 \neq 5=HL$ $x=8$ är falskt

② $x=3$ $VL=\sqrt{3+1}+3=5=HL$ $x=3$ är den enda lösningen till ekvationen

Kommentar: Kvadrering ger ej ekvivalens och då behövs verifiering!

Ex. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=0$ Lösning: Båda leden multipliceras med $x(x+2)$

$$\Rightarrow \frac{x(x+2)\cdot 1}{\cancel{x}}+\frac{x\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=0$$

$$x+2+x=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \quad x=-1$$

Verifiering

$VL: \frac{1}{-1}+\frac{1}{-1+2}=0=HL$ Ok! Lösning $x=-1$

Allmänt gäller: pq-formel

$$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Olikheter

Om $a\leq b$ så är
① $a\pm3\leq b\pm3$
② $3a\leq 3b$
③ $(-3)a\geq(-3)b$

ty a är ett positivt tal

Ex. Lös $\frac{x^2}{x-4} \geq x$ $\quad \frac{x^2}{x-4} - x \geq 0 \quad 0 \leq \frac{x^2}{x-4} - \frac{x(x-4)}{x-4}$

$\frac{4x}{x-4} \geq 0$

Lösning

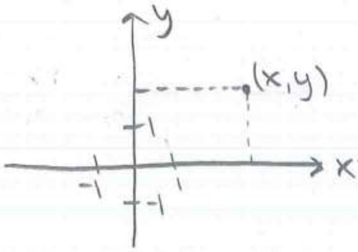
x		0		4
	+		−	ej def

$x \leq 0 \quad x > 4$

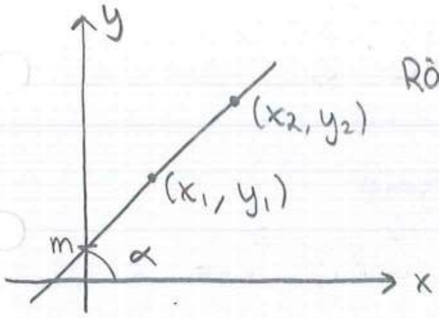
Kapitel 5 Analytisk geometri

5.1 Koordinatsystem

Ett koodinatplan



Varje punkt i planet har koodinaterna (x,y)



Räta linjens ekvation $y = kx + m$

$k = \tan\alpha$ kallas riktningskoefficient av linjen (lutningen)

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

① Lodräta linjer kan ej skrivas på $y = kx + m$ form.

② Varje linje kan skrivas på följande form $ax + by + C = 0$

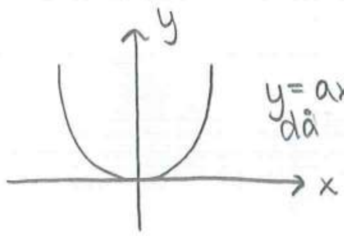
③ Den linje som går genom (x_1, y_1) och har riktningskoefficient k har ekvationen $y - y_1 = k(x - x_1)$ (enpunktsformeln.

④ Den linje som går genom $(x_1 y_1)$ och (x_2, y_2) har ekvationen

$\frac{y - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (tvåpunktsformeln)

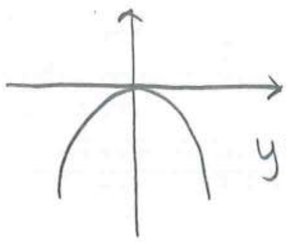
5.2 Parabel

Ⓐ



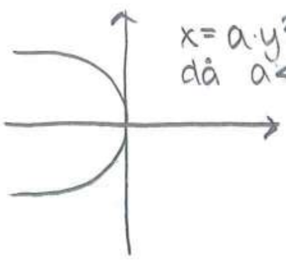
$y = ax^2$ då $a > 0$

Ⓑ



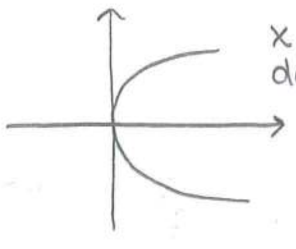
$y = ax^2$ $a < 0$

Ⓒ



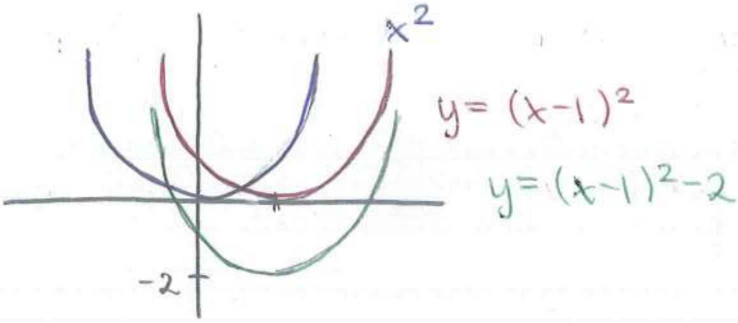
$x = a \cdot y^2$ då $a < 0$

Ⓓ



$x = y^2$ då $a > 0$

Ex. Rita $y = 2 + (x-1)^2$



5,3 Absolutbelopp

$|x-y|$ avståndet mellan x och y

Definition $|a| = \begin{cases} a & \text{då } a \geq 0 \\ -a & \text{då } a < 0 \end{cases}$

Ex. Lös $|x-3| = 5$ Det finns två punkter $x=8$ och $x=-2$ som har avståndet 5 från 3

Lösning: $|x-3| \iff x-3 = \pm 5$ $\quad x-3=5$, $x=8$ $\quad x-3=-5$, $x=-2$

Seminarium 1

① $4^x + 2^{x+1} + 1 = 4$ $\quad$ 0,3p

Lösning: $(2^x)^2 + 2^1 \cdot 2^x + 1 = 4$ $\qquad 2^x = -1+2 = 1$

$(2^x+1)^2 = 4$ $\qquad 2^x = -1-2 = -3 \Leftarrow$ detta är omöjligt då $2^x > 0$ för alla x.

$2^x + 1 = \pm 2$

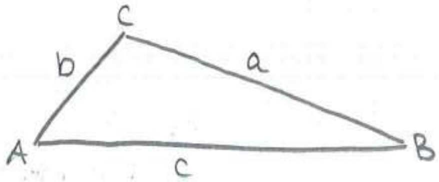
Vi får $2^x = 1$ $\quad x = \ln 1 = 0$ $\qquad$ Svar: $x = 0$

② $|x+1| = 2x+1$ $\qquad x+1 = \pm(2x+1)$

Om $x+1 = +(2x+1)$ då är $x=0$ uppfyller krav

Om $x+1 = -(2x+1)$ ger $x = -\frac{2}{3}$ falskt svar. $HL \neq VL$

③ Visa att $a = \frac{b+c}{2} \Rightarrow$ $\qquad$ 0,3p



$\sin \angle A = \frac{\sin \angle B + \sin \angle C}{2}$

Lösning: Sinussatsen ger $\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = r$

Så är: $a = r \cdot \sin \angle A$ $\qquad a = \frac{b+c}{2} \Rightarrow r \cdot \sin \angle A = \frac{\cancel{r} \cdot \sin \angle B + \cancel{r} \cdot \sin \angle C}{2}$

$b = r \cdot \sin \angle B$

$c = r \cdot \sin \angle C$ $\qquad \Rightarrow \sin \angle A = \frac{\sin \angle B + \sin \angle C}{2}$

V.S.V.