Föreläsning 2015-12-08

Kap 11 Taylorutvecklingar

11,1 Maclaurinutveckling

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \longrightarrow f'(0) \text{ då } x \to 0 \quad \therefore \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} \approx f'(0) \text{ för alla } x \text{ nära } 0.$$

dvs. $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ för alla x nära 0.

Def. $P_1(x) = f(0) + f'(0)x$ kallas förstagrads Maclaurinpolynomet av $f(x)$.

Obs. $P_1(x)$ uppfyller $P_1(0) = f(0)$ och $P_1'(0) = f'(0)$

Def. n:te grads Maclaurinpolynomet av $f(x)$ är $P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

n:te derivatan.

som uppfyller $P_n(0) = f(0)$, $P_n'(0) = f'(0)$
och $P_n''(0) = f''(0)$ .... n:te derivatan $P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

Ex. $f(x) = e^x \implies f(0) = 1 \quad f'(x) = e^x \implies f'(0) = 1 \quad \ldots \quad f^{(n)}(x) = e^x \implies f^{(n)}(0) = 1$

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

dvs. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Hur stor är skillnaden $f(x) - P_n(x) = R_{n+1}(x)$?

Sats. 11,1 Maclaurins formel med Lagranges restterm.

Om $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig i ett öppet intervall I och $0 \in I$ och $x \in I$ så gäller
$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$ för någon punkt som ligger mellan 0 och x.

Dvs. $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)}x^{n+1}$

Anm. 1) Talet c kan uttryckas som $c = \theta x$ där θ är något tal som uppfyller $0 < \theta < 1$

2) I vissa fall skriver man $R_{n+1}(x) = x^{n+1} \cdot B(x)$ med begränsande funktion $B(x)$.

Ex. 11,1 * $f(x) = e^x$

Vi vet att

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{P_n(x)} + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$f(x)=\underbrace{f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n}_{P_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_{n+1}(x)}$$

Ex. 11,4 Visa att

$|\arctan x - x| \leq \frac{1}{2}x^2$ gäller för alla $|x| \leq \frac{1}{2}$

$n=0$
$f(x)=f(0)+f'(\theta x)x$
dvs. $f(x)-f(0)=f'(\theta x)\cdot(x-0)$

Lösning: $f(x)=\arctan x \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\therefore f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2 = 0+1\cdot x+\frac{-\cancel{2}\theta x\cdot x^2}{(1+(\theta x)^2)^2\cdot\cancel{2}}$

$\therefore |\arctan x| = x-\frac{\theta x\cdot x^2}{(1+(\theta x)^2)^2}$ som ger $\arctan x - x = \left|-\frac{\theta x\cdot x^2}{(1+(\theta x)^2)^2}\right| = \frac{|\theta x|}{(1+(\theta x)^2)^2}x^2$

$(1+t)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1\pm 2t+t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1+t^2 \geq 2t \Leftrightarrow 1+t^2 \geq 2|t| \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{|t|}{1+t^2}$

Alt. $f(x)=\arctan x - x \quad \dots \quad P_1(x)=0$

Ex. 1) Bestäm $P_4(x)$ och $P_5(x)$ till $f(x)=\sin x$

2) Numeriskt beräkna $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$

Lösning: ①
$f(x)=\sin x \Rightarrow f(0)=0$ $\qquad f^{(4)}(x)=\sin x \Rightarrow f^{(4)}(0)=0$

$f'(x)=\cos x \Rightarrow f'(0)=1$ $\qquad f^{(5)}(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x \Rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \Rightarrow f''(0)=-1$

$\therefore f(x)=P_4(x)+R_5(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}\cdot x^5$

$= \underbrace{0+x-\frac{x^3}{3!}}_{P_4(x)}+\underbrace{\frac{\cos\theta x}{5!}x^5}_{R_5(x)}$

② $\int_0^1 \sin t^2\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt \approx \int_0^1 P_4(t)\,dt = \int_0^1 \left(t-\frac{t^3}{3!}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{4!}\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4!} = \frac{1}{2}-\frac{1}{24} = \frac{11}{24}$

Sats 11,3
1) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+$
2) $\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\dots+$
3) $\sin x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+$
4) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+$
5) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots+$
6) $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots+$