$$f'(x) = 0 + \frac{f^2(\sqrt{x^2})\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot 2x \qquad \text{dvs. } f'(x) = \frac{f^2(|x|)\cdot \sin x^2}{\cos^2 x^2} \cdot 2x$$

Men $f(x)$ är en jämn funktion, dvs. $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(|x|) = f(\pm x) = f(x)$

$$\therefore \begin{cases} f' = \dfrac{f^2 \sin x^2}{\cos^2(x^2)} \\ f(0) = -1 \end{cases} \qquad \int \frac{dt}{f^2} = \int \frac{\sin x^2}{\cos^2 x^2} 2x\,dx \quad \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix}$$

$$\text{HL: } \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \begin{bmatrix} s = \cos t \\ ds = -\sin t\,dt \end{bmatrix} = \int -\frac{ds}{s}$$

$$= \frac{-1}{s} + C = \frac{1}{\cos(x^2)} + C$$

$$f(x) = -\cos(x^2)$$

Föreläsning 2015-12-07

15.2 fort. För att hitta en partikulärlösning $y_p(x)$ till $y'' + ay' + by =$ ett polynom $\cdot e^{kx}$ skriver vi $y(x) = z(x) \cdot e^{kx}$ och sedan bestämmer vi $z_p(x)$, som ger $y_p(x) = z_p(x) \cdot e^{kx}$.

$e^{ikx} = \cos kx + i \cdot \sin kx$

Sats. Antag att

① $y'' + ay' + by = \text{polynom} \cdot \sin kx$ reell ekv.

② $y'' + ay' + by = \text{polynom} \cdot \cos kx$ reell ekv.

③ $y'' + ay' + by = \text{polynom} \cdot e^{ikx}$ komplex ekv.

Om $y_p(x)$ är en lösning till 3. så är $\mathrm{Re}(y_p(x))$ en lösning till 2. och $\mathrm{Im}(y_p(x))$ en lösning till 1.

Bevis. $y_p = \mathrm{Re}\, y_p + i\, \mathrm{Im}\, y_p$ är en lösning till 3.

$$\Rightarrow (\mathrm{Re}\, y_p + i\,\mathrm{Im}\, y_p)'' + a(\mathrm{Re}\, y_p + i\,\mathrm{Im}\, y_p)' + b(\mathrm{Re}\, y_p + i\,\mathrm{Im}\, y_p)$$
$$= \text{polynom}(\cos kx + i \cdot \sin kx)$$

$$(\mathrm{Re}\, y_p)'' + a(\mathrm{Re}\, y_p)' + b(\mathrm{Re}\, y_p) = \text{polynom} \cdot \cos kx$$
$$(\mathrm{Im}\, y_p)'' + a(\mathrm{Im}\, y_p)' + b(\mathrm{Im}\, y_p) = \text{polynom} \cdot \sin kx$$

Ex. $y'' + 2y' + 2y = 2\sin x$

Lösning: För $y_h(x)$: kara. ekv. $r^2 + 2r + 2 = 0$

$(r+1)^2 = -1$, $r = -1 \pm i$ $\qquad y_h(x) = e^{(-1)x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

För $y_p(x)$ Vi kollar $y'' + 2y' + 2y = 2e^{ix}$

Sätt $y(x) = z(x) \cdot e^{ix}$ Då är $(ze^{ix})'' + 2(ze^{ix})' + 2ze^{ix} = 2e^{ix}$

$$z''\cancel{e^{ix}} + z'\cancel{e^{ix}} - z\cancel{e^{ix}} + 2(z'\cancel{e^{ix}} + z\cancel{e^{ix}}i) + 2z\cancel{e^{ix}} = 2\cancel{e^{ix}}$$

$z'' + (2i+2)z' + (\cancel{-1+2i}+2)z = 2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (1+2i)z$

Ansätt $z_p(x) = A$ Så är $A'' + (2i+2(A)' + (1+2i)A = 2$

$\Rightarrow A = \dfrac{2}{1+2i} \Rightarrow z_p(x) = \dfrac{2}{1+2i} \Rightarrow y_p(x) = z_p(x)\cdot e^{ix} = \dfrac{2}{1+2i}e^{ix}$

är en lösning till ☆

Men $y_p(x) = \dfrac{2(\cos x + i\sin x)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{2}{5}\Big(\cos x + 2\sin x + i(-2\cos x + \sin x)\Big)$

$\therefore$ $\operatorname{Im} y_p(x) = \dfrac{2}{5}\left(-2\cos x + \sin x\right)$ är en partikulär lösning till den ursprungliga ekvationen.

Den sökta allmänna lösningen är $y(x) = y_h(x) + \operatorname{Im} y_p(x) = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) - \dfrac{4}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x.$

Sats. Antag att $y_p(x)$ är en lösning till $y'' + ay' + by = h_j(x)$ där $j = 1, 2, \ldots$

Så är $y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ en lösning till $y'' + ay' + by = h_1(x) + h_2(x)$

Bevis $(y_{p_1} + y_{p_2})'' + a(y_{p_1} + y_{p_2})' + b(y_{p_1} + y_{p_2}) = y''_{p_1} + ay'_{p_1} + by_{p_1} + y''_{p_2} + ay'_{p_2} + by_{p_2}$

$= h_1(x) + h_2(x)$

Ex. $y'' + 2y' + 2y = 2\sin x + x$

Lösning: Enligt exempel ovan vet vi att $y_h(x) = e^{-x}(C_1\cos x + C_1\sin x)$ och

$y_{p_1}(x)$ är en lösning till $y'' + 2y' + 2y = 2\sin x$ $\qquad y_{p_1}(x) = -\dfrac{4}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x$

Nu söker vi efter $y_{p_2}(x)$ för $y'' + 2y' + 2y = x$

Ansätt $y_{p_2} = Ax + B$ Då är $(Ax+B)'' + 2(Ax+B)' + 2(Ax+B) = x$

$2A = 1$ och $2A + 2B = 0 \Rightarrow A = \dfrac{1}{2} \quad B = -\dfrac{1}{2} \qquad y_{p_2}(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ Den sökta allmänna lösningen är $y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$

$= e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x) - \dfrac{4}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

Ex. Lös $y'' = x + 1$

Lösning: $y'' = x+1 \Rightarrow y' = \int y''\,dx = \int (x+1)\,dx = \dfrac{(x+1)^2}{2} + C_1$

$\Rightarrow y = \int y'\,dx = \int\left(\dfrac{(x+1)^2}{2} + C_1\right)dx = \dfrac{(x+1)^3}{6} + C_1x + C_2$

Alt. För y_h: kara. ekv. $r^2 = 0$, $\Rightarrow \underbrace{r_1 = r_2 = 0}^{\text{dubbelrot}} \Rightarrow y_h(x) = (C_1 + C_2x)e^{r_1 x} = C_1 + C_2x$

För y_p: Ansätter vi $y_p(x) = (Ax+B)\cdot x^2 \leftarrow$ ty $b=0$ och $a=0$
$= Ax^3 + Bx^2$

Så är $(Ax^3 + Bx^2)'' = x+1 \qquad A\cdot 3\,2x + B\cdot 2\cdot 1 = x+1 \qquad A = \dfrac{1}{6} \quad B = \dfrac{1}{2}$

$y_p(x) = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$ Den sökta lösningen $y(x) = C_1 + C_1x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$

Linjära diff. ekv. av ordningen n.

deriveras n ggr.

$$a_n y^{n} + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y' + a_0 y = h(x)$$

har en allmän lösning $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

där $y_h(x)$ innehåller n st. godtyckliga konstanter, ty varje rot r_j till kara. ekv. $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$ bildar termen

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{kj} x^{kj-1}) e^{r_j x}$$

Ex. Lös $y^4 + 2y^3 = x$

Lösning: kara. ekv. $r^4 + 2r^3 = 0$ $\quad r^3(r+2) = 0$ $\quad r_1 = r_2 = r_3 = 0$, $r_4 = -2$

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{0x} + C_4 e^{-2x}$$

ty $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$y_p(x)$: Vi antar att $y_p(x) = x^3(Ax + B) = Ax^4 + Bx^3$ är en lösning till diffekv. Så är $(Ax^4 + Bx^3)'''' + 2(Ax^4 + Bx^3)''' = x$

$$A \cdot 4! + 0 + (A\,4 \cdot 3 \cdot 2 + B \cdot 3 \cdot 2) \cdot 2 = x$$

$A = \frac{1}{48}$ $\quad B = -\frac{1}{24}$ $\quad$ Sätt in i $y_p(x)$ och summera $y_p(x) + y_h(x)$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$