Föreläsning 2015-12-

Diff ekv. $y'' + ay' + by = h(x)$ har en allmän lösning $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

För $y_h(x)$ Sats. Karaktäristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har två rötter r_1 och r_2..

Kom ihåg!

Då är

$$y_h(x) \begin{cases} C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} & \text{då } r_1 \neq r_2 \text{ reella} \\ (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} & \text{då } r_1 = r_2 \text{ reella} \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) & r_1 = \alpha + \beta i \quad r_2 = \alpha - \beta i \end{cases}$$

Bevis av fallet $r_1 = r_2$

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - r(r_1 + r_2) + r_1 r_2$$

$$\therefore a = -(r_1 + r_2) \overset{r_1 = r_2}{=} -2r_1 \ (-2r_2)$$

För att lösa $y'' + ay' + by = 0$, inför vi hjälpfunktionen

$$y(x) = z(x) e^{r_1 x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y(x) = z(x)e^{r_1 x} \\ y'' + ay' + by = 0 \\ \text{Om } b = 0 \text{ så är} \\ (y')' \text{ och } a(y') = 0 \\ w' + aw = 0 \\ \text{där } w(x) = y'(x) \\ \therefore y(x) = \int w(x)\,dx \end{array}}$$

Då är $y' = z' e^{r_1 x} + z e^{r_1 x} \cdot r_1$

$$y'' = (y')' = z'' e^{r_1 x} + z' e^{r_1 x} \cdot r_1 + z' e^{r_1 x} r_1 + z e^{r_1 x} r_1 \cdot r_1$$

$$= z'' e^{r_1 x} + 2 e^{r_1 x} r_1 z' + e^{r_1 x} r_1^2 z$$

Insättning ger $z'' \cancel{e^{r_1 x}} + z \cancel{e^{r_1 x}} r_1 z' + \cancel{e^{r_1 x}} r_1^2 z + a(z' \cancel{e^{r_1 x}} + z \cancel{e^{r_1 x}} r_1) + bz \cancel{e^{r_1 x}} = 0$

$$z'' + \underbrace{(2r + a)}_{\substack{=0 \\ \text{ty } a = -2r_1}} z' + \underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} z = 0 \quad \text{dvs. } z'' = 0$$

$$z' = \int (z')' \, dx = \int 0 \, dx = C_1 \qquad z = \int z' \, dx = \int C_1 \, dx = C_1 x + C_2$$

$\therefore$ Den sökta lösningarna till den ursprungliga ekvationen är

$$y(x) = z e^{r_1 x} = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x}$$

Ex. Lös $y'' - 6y' + 9y = 0$

Lösning: $r^2 - 6r + 9 = 0 \iff (r-3)^2$ dvs $r_1 = r_2 = 3$

En allmän lösning är $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$

Ex. $y'' + 2y' + 2y = 0$

Lösning: Kara. ekv. $r^2 + 2r + 2 = 0$ dvs. $(r+1)^2 + 1 = 0 \iff r = -1 \pm i$

Vi får en allmän lösning $y(x) = e^{-x}(C_1 \cdot \cos x + C_2 \sin x)$

Hur kan man hitta $y_p(x)$?

Sats. För $y'' + ay' + by = h(x)$ ☆ där $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ där $a_n \neq 0$

gäller

① $b \neq 0 \Rightarrow$ ☆ har en lösning $y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0$

② $b = 0$ och $a \neq 0 \Rightarrow$ ☆ har en lösning $y_p(x) = x(A_n x^n + \dots + A_0)$

③ $b = a = 0 \Rightarrow$ ☆ har lösningen $y_p(x) = x^2(A_n x^n + \dots + A_0)$
alla lösningar ges av $y(x) = \int(\int h(x)dx)\,dx$

Ex. Lös $y'' - y' = x$

Lösning: kara. ekv. $r^2 - r = 0$ $r(r-1) = 0$ $r_1 = 0$ $r_1 = 1$

$\therefore y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 + C_2 e^x$

För $y_p(x)$: $h(x) = x$ är en förstagradspolynom

Antag $y_p(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ är en lösning av $y'' - y' = x$

$\therefore (Ax^2 + Bx)'' - (Ax^2 + Bx)' = x$

$A\,2\cdot 1 - (2Ax + B) = x$ för alla x $\begin{cases} -2A = 1 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ o $B = -1$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$ Den sökta allmänna lösningen är $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$

$= C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x$

Sats. För att lösa $y'' + ay' + by = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)e^{bx}$ tal

inför vi hjälpfunktionen $y(x) = z(x)e^{bx}$ för att ta bort faktorn e^{bx} i HL.

Ex. Lös $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ Lösning: För $y_h(x)$ kara. ekv. $r^2 + 3r + 2 = 0$

$(r+1)(r+2) = 0$ $r_1 = -1$ $r_2 = -2$

$\Rightarrow y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Låt $y(x) = z(x)e^{-x}$, Då är $(ze^{-x})'' + 3(ze^{-x})' + 2(ze^{-x}) = xe^{-x}$

$= z''\cancel{e^{-x}} - 2z'\cancel{e^{-x}} + z\cancel{e^{-x}} + 3(z'\cancel{e^{-x}} - z\cancel{e^{-x}}) + 2z\cancel{e^{-x}} = x\cancel{e^{-x}}$

$z'' + z' = x$ Ansätter vi $z_p(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

Då är $(Ax^2 + Bx)'' + (Ax^2 + Bx)' = x$

$2A + 2Ax + B = x$

$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ o $B = -1$

$z_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ som ger

$y_p = z_p(x)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$

∴ Den sökta lösningen är

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x} = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$$

Sats $y'' + ay' + by = (a_n x^n + \dots + a_0)e^{ib_1 x}$ där alla $a, b, a_n \dots a_0, b_1$ är reella

har en allmän lösning $y(x) = y_1(x) + i y_2(x)$
där $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är reella.

$\Rightarrow$ ① $y_1(x)$ är en allmän lösning till $y'' + ay' + by = (a_n x^n + \dots + a_0)\cos b_1 x$

② $y_2(x)$ är en allmän lösning till $y'' + ay' + by = (a_n x^n + \dots + a_0)\sin b_1 x$

$$e^{ib_1 x} = \cos b_1 x + i \sin b_1 x$$

Seminarium 2015-12-04

Första ordningens diff. ekv.

① $y' + g(x)y = h(x)$ har lösningar $y(x) = e^{-G(x)}\int e^{G(x)} \cdot h(x)\,dx$
där $G(x) = \int g(x)dx$ ← ingen konstant

② $\frac{dy}{dx} = f(x)h(y)$ har lösningar $\int \frac{dy}{h(y)} = \int f(x)dx$ och $y = y_0$ där $h(y_0) = 0$

③ $y(x) = \int_a^x f(t, y(t))\,dt$ ← ett uttryck som innehåller t o $y = y(t)$ är ekvivalent med $\begin{cases} y'\cancel{(x)} = f(x, y\cancel{(x)}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Ex. Lös diff ekv. $\begin{cases} R'(t) = R(t) \cdot \ln \frac{R(t)}{k} \\ R(0) = \frac{k}{2} \end{cases}$ där k är en konstant

och beräkna $\lim_{t \to \infty} R(t)$

Lösning: $\int \frac{dR}{R \ln \frac{R}{k}} = \int -dt$ eller $R = 0$ (↓ Falskt, ty ln 0 ej def.) eller $R = k$ ← Falskt, ty det uppfyller ej $R(0) = \frac{k}{2}$

Men $\int \frac{dR}{R \cdot \ln \frac{R}{k}} = \begin{bmatrix} s = \frac{R}{k} \\ ds = \frac{1}{k}dR \end{bmatrix} = \int \frac{k\,ds}{k \cdot s \ln s} = \begin{bmatrix} u = \ln s \\ du = \frac{1}{s}ds \end{bmatrix} = \int \frac{1}{u}\,du$

$$= \ln|u| + C = \ln\left|\ln \frac{R}{k}\right| + C$$

∴ $\ln\left|\ln \frac{R}{k}\right| = -t + C_1$ är en allmän lösning till diff ekv.

som ger $e^{\ln|\ln \frac{R}{k}|} = e^{-t + C_1}$

$\ln \frac{R}{k} = \pm e^{C_1} e^{-t}$, dvs. $e^{\ln \frac{R}{k}} = e^{Ce^{-t}}$ $\quad R(t) = ke^{(Ce^{-t})}$

$R(0) = \frac{k}{2} \Leftrightarrow ke^{(C \cdot e^0)} = \frac{k}{2}$ $\quad e^C = \frac{1}{2}$ $\quad C \cdot \ln e = \ln 1/2$

$$C = \ln \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow R(t) = k \cdot \frac{1}{2} e^{-t} \longrightarrow k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = k \quad \text{då } t \to \infty$$

Ex 2. Antag att arean av en cirkelskiva ökar med en hastighet som är proportionell mot kvadraten av cirkelskivans radie. Vid matningarnas start är radien 1 m. Efter 2 sekunder är radien 4 meter. Hur stor beräknas arean vara efter 3 sekunder?

Lösning:

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \text{area } A = A(t) \end{cases} \qquad A'(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstant}}}{k} r^2(t)$$

$$A(t) = \pi r^2(t)$$

① $A'(t) = k \dfrac{A(t)}{\pi}$ eller ② $A(t) = \pi r(t)^2 \Rightarrow A'(t) = \pi\, 2\, r(t) \cdot r'(t)$

$$\therefore 2\pi \cancel{r(t)} \cdot r'(t) = k r(t)^{\cancel{2}} \Leftrightarrow 2\pi r'(t) = k r(t)$$

Vi har ①
$$\begin{cases} A' = \frac{k}{\pi} A \\ A(0) = \pi r(0)^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \\ A(2) = \pi r(2)^2 = \pi 4^2 = 16\pi \\ A(3) = ? \end{cases}$$

②
$$\begin{cases} 2\pi r' = kr \\ r(0) = 1 \\ r(2) = 4 \\ r(3) = ? \Rightarrow \end{cases}$$

$$A(3) = \pi r(3)^2 = ?$$

$A' - \frac{k}{\pi} A = 0 \Rightarrow$ Integrerande faktor är

$$e^{G(t)} = e^{-\frac{k}{\pi} t} \qquad \Rightarrow A(t) = e^{-G(t)} \int 0 e^{G(t)} dt = C e^{\frac{k}{\pi} t}$$

$$\therefore \pi = A(0) = Ce^0 \Rightarrow C = \pi \qquad \text{och} \qquad 16\pi = A(2) = \pi e^{\frac{k}{\pi} \cdot 2} \Rightarrow e^{\frac{2k}{\pi}} = 16$$

$$\Rightarrow e^{\frac{k}{\pi}} = \sqrt{16} = 4 \qquad A(t) = \pi \left(e^{\frac{k}{2}}\right)^t = 4^t \cdot \pi$$

$$A(3) = \pi \cdot 4^3 = 64\pi$$

Ex. 3 a) Formulera integralkalkylens medelvärdessats

b) Formulera analysens huvudsats

c) Bestäm alla kontinuerliga funktioner f som uppfyller

$$f(x) = -1 + \int_0^{x^2} \frac{f^2(\sqrt{t}) \sin t}{\cos^2 t} dt \quad , -1 \leq x \leq 1$$

a) $f(x)$ är kont. i $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$ för ngt. $a \leq c \leq b$

b) $f(x)$ är kont. i $[a, b] \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ för alla $a < x < b$

c) Obs! $\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f'(x) = 0 + \frac{f^2(\sqrt{x^2})\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot 2x \qquad \text{dvs. } f'(x) = \frac{f^2(|x|)\cdot \sin x^2}{\cos^2 x^2} \cdot 2x$$

Men $f(x)$ är en jämn funktion, dvs. $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(|x|) = f(\pm x) = f(x)$

$$\therefore \begin{cases} f' = \dfrac{f^2 \sin x^2}{\cos^2(x^2)} \\ f(0) = -1 \end{cases} \qquad \int \frac{dt}{f^2} = \int \frac{\sin x^2}{\cos^2 x^2} 2x\, dx \quad \begin{bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{bmatrix}$$

$$\text{HL: } \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \begin{bmatrix} s = \cos t \\ ds = -\sin t\, dt \end{bmatrix} = \int -\frac{ds}{s}$$

$$= \frac{-1}{s} + C = \frac{1}{\cos(x^2)} + C$$

$$f(x) = -\cos(x^2)$$

Föreläsning 2015-12-07

15.2 fort. För att hitta en partikulärlösning $y_p(x)$ till $y'' + ay' + by =$ ett polynom $\cdot e^{kx}$ skriver vi $y(x) = z(x) \cdot e^{kx}$ och sedan bestämmer vi $z_p(x)$, som ger $y_p(x) = z_p(x) \cdot e^{kx}$.

$e^{ikx} = \cos kx + i \cdot \sin kx$

Sats. Antag att

① $y'' + ay' + by = \text{polynom} \cdot \sin kx$ reell ekv.

② $y'' + ay' + by = \text{polynom} \cdot \cos kx$ reell ekv.

③ $y'' + ay' + by = \text{polynom} \cdot e^{ikx}$ komplex ekv.

Om $y_p(x)$ är en lösning till 3. så är $Re(y_p(x))$ en lösning till 2. och $Im(y_p(x))$ en lösning till 1.

Bevis. $y_p = Re\, y_p + i\, Im\, y_p$ är en lösning till 3.

$$\Rightarrow (Re\, y_p + i\, Im\, y_p)'' + a(Re\, y_p + i\, Im\, y_p)' + b(Re\, y_p + i\, Im\, y_p)$$
$$= \text{polynom}(\cos kx + i \cdot \sin kx)$$

$$(Re\, y_p)'' + a(Re\, y_p)' + b(Re\, y_p) = \text{polynom} \cdot \cos kx$$

$$(Im\, y_p)'' + a(Im\, y_p)' + b(Im\, y_p) = \text{polynom} \cdot \sin kx$$

Ex. $y'' + 2y' + 2y = 2\sin x$

Lösning: För $y_h(x)$: kara. ekv. $r^2 + 2r + 2 = 0$

$(r+1)^2 = -1$, $r = -1 \pm i$ $\qquad y_h(x) = e^{(-1)x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

För $y_p(x)$ Vi kollar $y'' + 2y' + 2y = 2e^{ix}$

Sätt $y(x) = z(x) \cdot e^{ix}$ Då är $(ze^{ix})'' + 2(ze^{ix})' + 2ze^{ix} = 2e^{ix}$

$$z''\cancel{e^{ix}} + z'\cancel{e^{ix}} - z\cancel{e^{ix}} + 2(z'\cancel{e^{ix}} + z\cancel{e^{ix}}i) + 2z\cancel{e^{ix}} = 2\cancel{e^{ix}}$$