Föreläsning 2015-11-24

14,3. Massa

① Om densitet ρ (densitet) är en konstantfunktion så är

a) För en tråd γ gäller massa = $\rho \cdot$ längd.

b) För en platta (planskiva) gäller massa = $\rho \cdot$ area

c) För en kropp gäller massa = $\rho \cdot$ volym

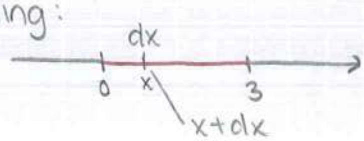
② Om densitetsfunktion är kontinuerlig funktion så kan vi betrakta densitet som en konstant runt varje punkt.

Ex. En tråd som är 3 meter lång ligger på tallinjen mellan 0 och 3

Densiteten är $p(x) = 2x+1$ där $0 \leq x \leq 3$

Beräkna massan av tråden.

Lösning:



Trådbiten vid punkten x har massan $dm = \rho(x) \cdot dx$

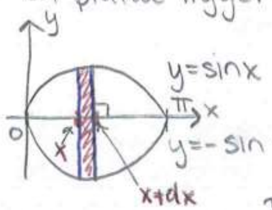
dx är längden.

Totalmassan av tråden är $\int_{\text{hela tråden}} dm \overset{\text{dvs.}}{=} \int_0^3 p(x)\,dx = \int_0^3 (2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_0^3 = 12$

Ex. En platta ligger på platsen

Densitet $\rho = \rho(x) = x$

densitet beror endast på x-koordinaten.



Bestäm massan.

Lösning:

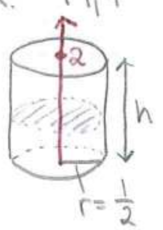
✱ Bandet har nästan en konstant densitet $\rho(x)$

Bandets massa är $dm = \underbrace{\rho(x)}_{\text{densitet}} \cdot \underbrace{(\sin x - (-\sin x))\,dx}_{\text{area}}$

Plattans massa $\int_0^\pi dm = \int_0^\pi 2\rho(x) \cdot \sin x\,dx = 2\int_0^\pi x \cdot \sin x\,dx$ [Partiell integration]

$\Rightarrow$ totala massan $= 2\pi$

Ex. 14,7* En cylinder kropp har densiteten $\rho = \rho(h) = 500 - 100h$



Bestäm massan

Den har alltså massan $dm = \rho \cdot dV$

$= (500-100h) \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 dh$

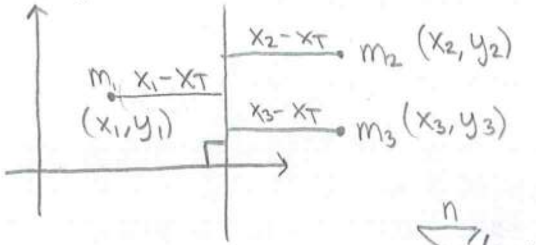
dh


har volymen $dV = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 dh$

Totalmassan $= \int dm = \int_0^2 (500-100h)\frac{\pi}{4}\,dh = \frac{100}{4}\pi \int_0^2 (5-h)\,dh$

$= 25\pi \left[5h - \frac{h^2}{2}\right]_0^2 \ldots$ osv

Tyngdpunkt (Masscentrum



① Totalmoment av partiklarna med avseende på linjen $x = x_T$ ska vara 0.

$$\sum_{j=1}^{3} (x_j - x_T)\, m_j = 0 \quad \text{dvs.} \quad \sum_{j=1}^{n} (x_j m_j - x_T m_j) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j m_j - \sum_{j=1}^{3} x_T m_j = 0$$

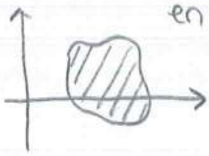
Vi får $x_T = \dfrac{\sum_{j=1}^{3} x_j m_j}{\sum_{j=1}^{3} m_j}$

På samma sätt får vi

$$y_T = \frac{\sum_{j=1}^{3} y_j m_j}{\sum_{j=1}^{3} m_j}$$

Allmänt har vi följande

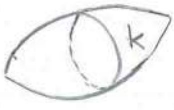
a) en platta k



Masscentrumet av plattan k uppfyller

$$x_T = \frac{\int_k x\,dm}{\int_k dm} \qquad y_T = \frac{\int_k y\,dm}{\int_k dm}$$

b)



Masscentrum (x_T, y_T, z_T) för kroppen k uppfyller

1. Har vi redan, se början av föreläsning
2.
3. $z_T = \dfrac{\int_k z\,dm}{\int_k dm}$

Ex.

densitet $= \rho(x) = 2x+1$ där $0 \leq x \leq 3$

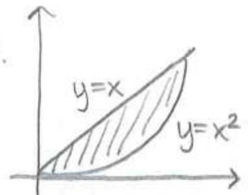
Masscentrum x_T av tråden

$$x_T = \frac{\int_k x\,dm}{\int_k dm} = \frac{\int_0^3 x\rho(x)\,dx}{\int_0^3 \rho(x)\,dx} = \frac{\int_0^3 x(2x+1)\,dx}{\int_0^3 (2x+1)\,dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^3}{\left[x^2 + x\right]_0^3} = \frac{\frac{2}{\cancel{3}} \cdot 3^{\cancel{3}} + \frac{3^2}{2}}{3^2 + 3} = \frac{9 + \frac{9}{2}}{12}$$

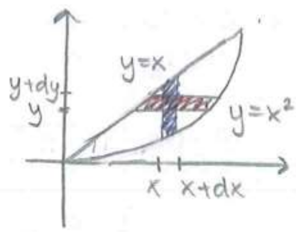
$$= \frac{18+9}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{27}{24} = \frac{\cancel{3} \cdot 9}{\cancel{3} \cdot 8} = \frac{9}{8}$$

Ex.



Plattan är gjord av ett homogent material dvs. densiteten $\rho = \rho_0 \leftarrow$ konstant

Bestäm masscentrum (x_T, y_T)



$dm = \rho_0 \cdot \text{längd} \cdot dx$

$= \rho_0 (x - x^2) dx$

Lösning:

$* \; x_T = \dfrac{\int_K x \, dm}{\int_K dm}$

$$= \frac{\int_0^1 x\rho_0(x-x^2)dx}{\int_0^1 \rho_0(x-x^2)dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1} = \frac{1}{2}$$

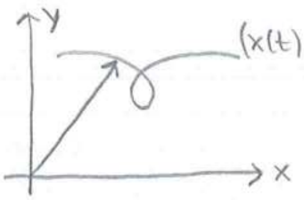
$$* \; y_T = \frac{\int_K y \, dm}{\int_K dm} = \frac{\int_0^1 y\cancel{\rho_0}(\sqrt{y}-y)dy}{\int_0^1 \cancel{\rho_0}(\sqrt{y}-y)dy} = \text{Beräkna integraler}$$

Föreläsning 2015-11-26

14.4 Kurvlängd och rotationsarea

En vektorvärd funktion

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, där $\alpha \le t \le \beta$ kallas en parametrisk kurva med paraten t.



OBS! Kurvan $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ där $\alpha \le t \le \beta$ även kan uttryckas som

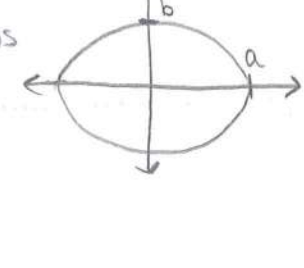
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{där } \alpha \le t \le \beta$$

Ex. $\vec{r}(t) = (a \cdot \cos t, \; b \cdot \sin t)$ där $0 \le t \le 2\pi$ Grafen av kurvan?

Lösning: Sätt $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$

$\frac{x}{a} = \cos t$ och $\frac{y}{b} = \sin t$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \overbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}^{1}$

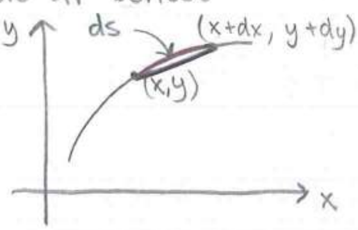
ellips



Sats Längden av kurvan $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$

är $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

Idé av beviset



$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$

Längden av sträckan är $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

Men $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \end{matrix}$

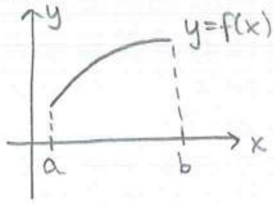
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Kurvans längd är

$$\int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Sats: Längden av funktionskurvan $y = f(x)$, där $a \leq x \leq b$ är

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$



Bevis. Skriv $x = t$ Så är $y = f(t)$ Funktionskurva kan uttryckas som

$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ $a \leq t \leq b$ som enligt satsen ovan, har längden

$$\int_a^b \sqrt{(t')^2 + (f'(t))^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt \quad \#$$

Ex. 14,12 Längden till kurvan $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$

är $\displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + ((x^{\frac{3}{2}})')^2}\, dx = \int_0^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$

$$= \left[\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \cdot \frac{1}{9/4} \right]_0^{\frac{4}{3}} = \ldots = \frac{56}{27}$$

Ex. Längden av kurvan $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $0 \leq x \leq 1$

är $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}((e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2)}\, dx$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}((e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2)}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2}\, dx = \frac{1}{2}\int e^x + e^{-x}\, dx = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

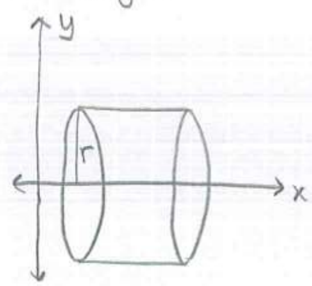
Ex. Kurvan $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

har längden $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{((\cos^3 t)')^2 + ((\sin^3 t)')^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(3\cos^2 t(-\sin t))^2 + (3\sin^2 t \cdot \cos t)^2}\, dt$

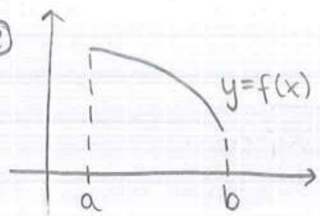
$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3\sin t \cdot \cos t)^2 \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}}\, dt = \int_0^{\pi/2} 3\sin t \cdot \cos t \, dt = \begin{bmatrix} t = \sin t \\ dt = \cos t\, dt \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{\pi/2} 3t\, dt = \left[\frac{3t^2}{2} \right]_0^{\pi/2} = \left[\frac{3\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}$$

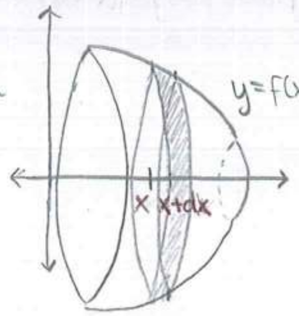
Rotationsyta

① 

Cylindern har arean
$2\pi r \cdot \ell$

② 

Funktionsytan
$y = f(x)$ $a \leq x \leq b$
roteras runt x-axeln

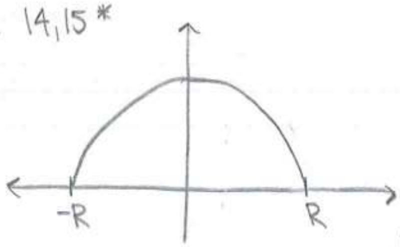


Vi får en rotationsyta

$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$
har arean
$2\pi f(x) ds =$
$= 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Ex. 14,15 *

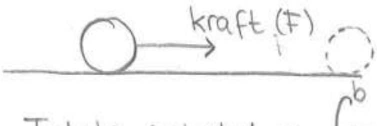


$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \sqrt{R^2 - x^2}$

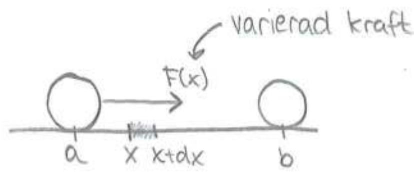
Sfären betraktas som en rotationsyta
ur $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ där $-R \leq x \leq R$

Arean av sfären är $\displaystyle 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\sqrt{R^2 - x^2}'\right)^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx$

$$2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 \cdot \left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2 - x^2 + x^2)}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} R^2\, dx = 4\pi R^2$$



Arbete = kraft · avstånd



Totala arbetet $= \displaystyle\int_a^b F(x)\, dx$