

Generaliserade integraler

För att definiera (Riemann) integralen $\int_a^b f(x) dx$ kräver vi att både funktionen $f(x)$ och $[a, b]$ är begränsade.

Def. 13,5 (Generaliserade integraler på obegränsade intervall)

Vi definierar $\int_a^\infty f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{X \rightarrow \infty} \int_a^X f(x) dx$

Vi har ① $\int_a^\infty f(x) dx$ sägs vara konvergent och gränsvärdet existerar ändligt.

② Annars kallas $\int_a^\infty f(x) dx$ divergent, dvs. gränsvärde existerar inte ändligt.

③ Analogt, definierar vi $\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{X \rightarrow -\infty} \int_X^b f(x) dx$

Ex. $\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \sin x dx = \lim_{X \rightarrow \infty} [-\cos x]_0^X = \lim_{X \rightarrow \infty} (1 - \cos X)$

Ex $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{x^{-1}}{1} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1$

Slutsats: gränsvärdet existerar ej. Pendlar mellan -1 o 1 . divergent integral.

Slutsats: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ konvergerar mot 1, dvs. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$

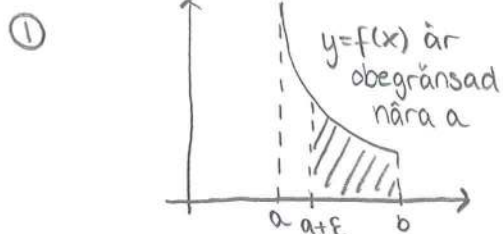
Ex. $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$

divergent integral då gränsvärdet ej existerar ändligt.

Allmänt $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{konvergent då } \alpha > 1 \\ \text{divergent då } \alpha \leq 1 \end{cases}$

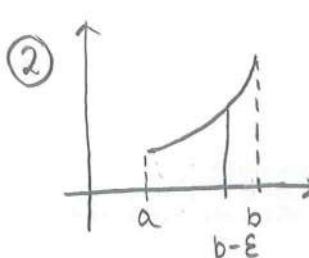
Sats 13,11

Def. 13,6 (Generaliserade integraler för obegränsade funktioner b)



Vi definierar $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$

Om gränsvärdet är ändligt kallas $\int_a^b f(x) dx$ konvergent.

②  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$

Ex. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{x^{-1}}{1} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty$

Slutsats: Integralen är divergent

Ex. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_{\varepsilon}^1 = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2 \cdot 1 = 2$

Konvergent integral med gränsvärdet 2.

○ Sats 13,11 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \text{konvergent då } \alpha < 1 \\ \text{divergent då } \alpha \geq 1 \end{cases}$

○ Sats 13,10 Jämförelsesatsen

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för alla $x \geq a$

Då är
① $\int_a^\infty g(x) dx$ konvergent $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ konvergerar

② $\int_a^\infty f(x) dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^\infty g(x) dx$ divergerar

Ex. 13,15 Är $\int \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$ konvergent?

Lösning:

$0 \leq \frac{e^{-x^2}}{x^2} = \frac{1}{x^2 e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2 \cdot 1}$ är konvergent för alla $x \geq 1$

Men vi vet att $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent, enligt sats 13,10 ① vet vi

att $\int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$ är konvergent

Sats 13,12 (Jämförelse sats i gränsvärde form)

Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är positiva i $[a, \infty[$ och att $0 < \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

$\int_a^\infty f(x) dx$ konvergent $\Leftrightarrow \int_a^\infty g(x) dx$ konvergerar

Ex. Är $\int_2^{\infty} \frac{x^2+5x-10}{x^3-x+100} dx$ konvergent?

Lösning: $\frac{x^2+5x-10}{x^3-x+100} = \frac{x^2}{x^3} \left(\frac{1 + \frac{5}{x} - \frac{10}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{100}{x^3}} \right)$ då $x \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} \left(\frac{1 + 5/x - 10/x^2}{1 + 1/x^2 + 100/x^3} \right)}{\frac{1}{x}} = 1$ och $0 < 1 < \infty$

Enligt sats 13,12 gäller

$\int_2^{\infty} f(x) dx$ divergerar $\Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$ divergerar

Ex. 13,16 Konvergerar $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$?

Metod 1 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \dots$

Metod 2 $\frac{\frac{1}{x^2-1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$ och $0 \leq 1 \leq \infty$

Men $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergent $\therefore \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$ konvergent

Seminarium 2015-11-20

Bestäm alla stationära punkter till $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{1-t^4} dt$ på $]0, \frac{1}{2}[$

$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = f(g(x))g'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$ denna formel kan användas!

Lösning: $g'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{1-t^4} dt = \sqrt{1-(\sqrt{2x})^4} \cdot (\sqrt{2x})' - \sqrt{1-(\sqrt{x})^4} \cdot (\sqrt{x})'$

$= \sqrt{1-4x^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

För att räkna ut stationära punkter: $g'(x) = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} (\sqrt{2} \sqrt{1-4x^2} - \sqrt{1-x^2}) = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2} \sqrt{1-4x^2} - \sqrt{1-x^2} = 0$

$2(1-4x^2) = 1-x^2 \Leftrightarrow 2-8x^2 = 1-x^2$

$\sqrt{2} \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-x^2}$

$7x^2 = 1 \quad x = \pm \sqrt{\frac{1}{7}}$

Svar: Enda stationära punkten

$x = \sqrt{\frac{1}{7}}$

För vilka konstanter α kongruerar $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$?

Lösning:

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_e^x \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \left[\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{matrix} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^{\ln x} \frac{1}{t^\alpha} e^t dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^{\ln x} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

Enligt def. av integralen konvergerar den då $\alpha > 1$.

Beräkna $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$

Lösning: $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{0+\epsilon}^x \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$

Nu beräknar vi $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx$ Vi har $\int \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx$

variabelbyte för \sqrt{x} $\left[\begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{matrix} \right] = \int \frac{1}{t + t^3} \cdot 2t = 2 \int \frac{1}{1 + t^2} dt$

Men $\frac{1}{1+t^3} \xrightarrow{\text{polynomdivision}} \frac{1}{(1+t)(t^2-t+1)} \stackrel{\text{antag}}{=} \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$

Så är $1 = A(t^2 - t + 1) + (Bt + C)(1 + t)$

För $t = -1$ har vi $1 = 3A \quad A = \frac{1}{3}$

För $t = 0$ har vi $1 = \frac{1}{3} + C \quad C = \frac{2}{3}$

För $t = 1$ $1 = \frac{1}{3} + (B + \frac{2}{3}) \cdot 2 \quad B = -\frac{1}{3}$

$\therefore \int \frac{1}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t+1} + \frac{-2t+2}{t^2-t+1} \right) dt$

$= \frac{1}{3} \ln |t+1| + \frac{1}{3} \int \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt$

där $\int \frac{-t+2}{t^2-t+1} = \int \frac{-t+2}{(t-\frac{1}{2}) + \frac{3}{4}} = \left[\begin{matrix} s = t - \frac{1}{2} \\ ds = dt \end{matrix} \right] = \int \frac{-s - \frac{1}{2} + 2}{s^2 + \frac{3}{4}} ds$

$= -\int \frac{s}{s^2 + \frac{3}{4}} ds + \frac{3}{2} \int \frac{1}{s^2 + \frac{3}{4}} ds = -\frac{1}{2} \ln(s^2 + \frac{3}{4}) + \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{\underbrace{\frac{4}{3}s^2 + 1}_{(\frac{2s}{\sqrt{3}})^2}} ds$

$$-\frac{1}{2} \ln\left(s^2 + \frac{3}{4}\right) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \ln\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right) + C$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x} + x^3} dx = \frac{2}{3} \ln(\sqrt{x} + 1) + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) \ln\left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)\right) + C$$

till start:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^3} dx = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} (h(x) - h(\varepsilon))$$

$$h(x) = \frac{2}{3} \ln(\sqrt{x} + 1) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3} \ln\left((\sqrt{x} + 1)^2\right) - \frac{1}{3} \ln\left(\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \ln \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - \sqrt{x} + 1} \quad \text{da } x \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{3} \ln 1 = 0$$

$$h(\varepsilon) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi$$

12,51 i Övningsbok

$$a) \int e^x \cdot \sin e^x dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right] = \int \sin t dt = -\cos t + C = -\cos e^x + C$$

$$b) \int x(x+1)^9 dx = \left[\begin{array}{l} x+1 = t \\ dt = dx \end{array} \right] = \int (t-1) \cdot t^9 dt = \int t^{10} - t^9 dt = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{10}}{10} \\ = \frac{(x+1)^{11}}{11} - \frac{(x+1)^{10}}{10}$$

$$c) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot (\tan x)' = x \cdot \tan x - \int 1 \cdot \tan x dx \\ = x \cdot \tan x - \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = x \cdot \tan x + \int \frac{1}{t} dt$$

$$x \cdot \tan x + \ln |t| + C = x \cdot \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$d) \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \int \frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x} dx \\ \left[\begin{array}{l} t = \cos x + \sin x \\ dt = (\cos x + \sin x)' dx \end{array} \right] = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |\cos x + \sin x| + C$$