Föreläsning 2015-11-19

Generaliserade integraler

För att definiera (Riemann) integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ kräver vi att både funktionen $f(x)$ och $[a,b]$ är begränsade.

Def. 13,5 (Generaliserade integraler på obegränsade intervall)

Vi definierar $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx \overset{def.}{=} \int_a^{X} f(x)\,dx$

Vi har ① $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ sägs vara konvergent och gränsvärdet existerar ändligt.

② Annars kallas $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ divergent, dvs. gränsvärde existerar inte ändligt.

③ Analogt, definierar vi $\displaystyle\int_{-\infty}^{b\,(\text{tal})} f(x)\,dx \overset{def.}{=} \lim_{X\to-\infty}\int_X^b f(x)\,dx$

Ex. $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{X\to\infty}\int_0^X \sin x\,dx = \lim_{X\to\infty}\Big[-\cos x\Big]_0^X = \lim_{X\to\infty}(1-\cos X)$

Slutsats: gränsvärdet existerar ej. Pendlar mellan −1 o 1. divergent integral.

Ex

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\int_1^X x^{-2}\,dx = \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{x^{-1}}{1}\right]_1^X = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{X}\right) = 1$$

Slutsats: $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ konvergerar mot 1, dvs. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$

Ex. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to\infty}\int_1^X\frac{1}{x}\,dx = \lim_{x\to\infty}\Big[\ln|x|\Big]_1^X = \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$

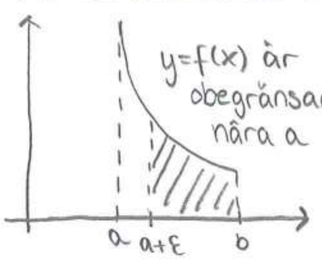
divergent integral då gränsvärdet ej existerar ändligt.

Allmänt

Sats 13,11 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx = \begin{cases}\text{konvergent då } \alpha>1\\ \text{divergent då } \alpha\le 1\end{cases}$

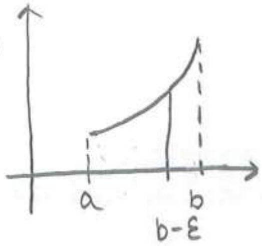
Def. 13,6 (Generaliserade integraler för obegränsade funktioner

①



Vi definierar $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

Om gränsvärdet är ändligt kallas $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ konvergent.

② 

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Ex. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-\frac{x^{-1}}{1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty$

Slutsats: Integralen är divergent

Ex. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 = 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} 1-\sqrt{\varepsilon} = 2\cdot 1 = 2$

Konvergent integral med gränsvärdet 2.

Sats 13,11 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{konvergent då } \alpha < 1 \\ \text{divergent då } \alpha \geq 1 \end{cases}$

Sats 13,10 Jämförelsesatsen

Antag att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för alla $x \geq a$

Då är

① $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerar

② $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergerar

Ex. 13,15 Är $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx$ konvergent?

Lösning:

$0 \leq \dfrac{e^{-x^2}}{x^2} = \dfrac{1}{x^2 e^{x^2}} \leq \dfrac{1}{x^2 \cdot 1}$ är konvergent för alla $x \geq 1$

Men vi vet att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ är konvergent, enligt sats 13.10 ① vet vi att $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2}\,dx$ är konvergent

Sats 13,12 (Jämförelse sats i gränsvärde form)

Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är positiva i $[a,\infty[$ och att $0 < \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent $\Leftrightarrow \displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerar

Ex.
Är $\int_2^{\infty} \frac{x^2+5x-10}{x^3-x+100}\,dx$ konvergent?

Lösning: $\frac{x^2+5x-10}{x^3+x+100} = \frac{x^2}{x^3}\left(\frac{1+\frac{5}{x}-\frac{10}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{100}{x^3}}\right)$ då $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\cancel{x^2}}{x^3}\left(\frac{1+5/x-10/x^2}{1+1/x^2+100/x^3}\right)}{\frac{1}{\cancel{x}}} = 1 \text{ och } 0<1<\infty$$

Enligt sats 13,12 gäller

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx \text{ divergerar} \iff \int_2^{\infty} \frac{1}{x}\,dx \text{ divergerar}$$

Ex. 13,16 Konvergerar $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$?

Metod 1 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx = \ldots$

Metod 2 $\frac{\frac{1}{x^2-1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$ och $0 \leq 1 \leq \infty$

Men $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent $\therefore \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$ konvergent

Seminarium 2015-11-20

Bestäm alla stationära punkter till $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{1-t^4}\,dt$ på $]0, \frac{1}{2}[$

$$\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$$ denna formel kan användas!

Lösning: $g'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{1-t^4}\,dt = \sqrt{1-(\sqrt{2x})^4}\cdot(\sqrt{2x})' - \sqrt{1-(\sqrt{x})^4}\cdot(\sqrt{x})'$

$$= \sqrt{1-4x^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

För att räkna ut stationära punkter.
$g'(x)=0$

$\therefore \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{2}\sqrt{1-4x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = 0 \iff \sqrt{2}\sqrt{1-4x^2} - \sqrt{1-x^2} = 0$

$\sqrt{2}\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-x^2}$

$2(1-4x^2) = 1-x^2 \iff 2-8x^2 = 1-x^2$

$7x^2 = 1 \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{7}}$

Svar: Enda stationära punkten $x = \sqrt{\frac{1}{7}}$

För vilka konstanter α kongruerar $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$?

Lösning:

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\int_e^x \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx = \begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\int_1^{\ln x}\frac{1}{\cancel{e^t}\cdot t^\alpha}\,\cancel{e^t}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty}\int_1^{\ln x}\frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

Enligt def. av integralen konvergerar den då $\alpha > 1$.

Beräkna $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$

Lösning: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx = \lim_{\substack{X\to\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{0+\varepsilon}^{X} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$

Nu beräknar vi $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$ Vi har $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx$

variabelbyte för $\sqrt{x}$ $\begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ x=t^2 \\ dx=2t\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t+t^4}\cdot 2t = 2\int \frac{1}{1+t^3}\,dt$

polynomdivision

Men $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{(1+t)(t^2-t+1)} \overset{\text{antag}}{=} \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$

Så är $1 = A(t^2-t+1) + (Bt+C)(1+t)$

För $t=-1$ har vi $1=3A$ $A=\frac{1}{3}$

För $t=0$ har vi $1=\frac{1}{3}+C$ $C=\frac{2}{3}$

För $t=1$ $1=\frac{1}{3}+\left(B+\frac{2}{3}\right)\cdot 2$ $B=-\frac{1}{3}$

$$\therefore \int \frac{1}{1+t^3}\,dt = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t+1} + \frac{-2t+2}{t^2-t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{3}\int \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt$$

där $\int \frac{-t+2}{t^2-t+1} = \int \frac{-t+2}{\left(t-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}} = \begin{bmatrix} s=t-\frac{1}{2} \\ ds=dt \end{bmatrix} = \int \frac{-s-\frac{1}{2}+2}{s^2+\frac{3}{4}}\,ds$

$$= -\int \frac{s}{s^2+\frac{3}{4}}\,ds + \frac{3}{2}\int \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}}\,ds = -\frac{1}{2}\ln\left(s^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\,\frac{1}{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\underbrace{\frac{4}{3}s^2}_{\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)^2}+1}\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(s^2+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)+C$$

$$\therefore \int\frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx = \frac{2}{3}\ln(\sqrt{x}+1)+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)\right)+C$$

till start:

$$\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}dx = \lim_{\substack{x\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}}\left(h(x)-h(\varepsilon)\right)$$

$$h(x)=\frac{2}{3}\ln(\sqrt{x}+1)-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}\ln\left((\sqrt{x}+1)^2\right)-\frac{1}{3}\ln\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\ln\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1} \quad \text{då } x\to 0 \quad \to \frac{1}{3}\ln 1 = 0$$

$$h(\varepsilon)=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$$

12,51 i övningsbok

a) $\int e^x\cdot\sin e^x\,dx = \begin{bmatrix} t=e^x \\ dt=e^x dx\end{bmatrix} = \int \sin t\,dt = -\cos t + C = -\cos e^x + C$

b) $\int x(x+1)^9\,dx = \begin{bmatrix} x+1=t \\ dt=dx\end{bmatrix} = \int (t-1)\cdot t^9\,dt = \int t^{10}-t^9\,dt = \frac{t^{11}}{11}-\frac{t^{10}}{10}$

$$=\frac{(x+1)^{11}}{11}-\frac{(x+1)^{10}}{10}$$

c) $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx = \int x\cdot(\tan x)' = x\cdot\tan x - \int 1\cdot\tan x\,dx$

$$= x\cdot\tan x - \int\frac{1}{\cos x}\cdot\sin x\,dx = \begin{bmatrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x\,dx\end{bmatrix} = x\cdot\tan x + \int\frac{1}{t}dt$$

$$x\cdot\tan x+\ln|t|+C = x\cdot\tan x+\ln|\cos x|+C$$

d) $\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx = \int\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}dx = \int\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} = \int\frac{(\cos x+\sin x)'}{\cos x+\sin x}dx$

$$\begin{bmatrix} t=\cos x+\sin x \\ dt=(\cos x+\sin x)'\,dx\end{bmatrix} = \int\frac{1}{t}dt = \ln|t|+C = \ln|\cos x+\sin x|+C$$