$= 2^{18} \cdot 3^9 (\cos 6\pi + i \cdot \sin 6\pi) = 2^{18} \cdot 3^9$

ur $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ① och $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$ ②

① + ② ger $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ ① − ② ger $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ } eulers formel

Lös ekvationen $z^2 - (2+2i)z + 3+6i = 0$

Lösning: pq formel ger $z = -\dfrac{-(2+2i)}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{-(2+2i)}{2}\right)^2 - (3+6i)}$

$= 1+i \pm \sqrt{-3-4i}$

$\sqrt{-3-4i} = x+yi$. Då är $-3-4i = (x+yi)^2$ som ger $5 = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = |-3-4i|$

$= |x+yi|^2 = x^2+y^2$

och $-3-4i = x^2-y^2+2xyi$ dvs. $x^2-y^2=-3$ $2xy=-4$

Dvs. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=-3 \\ 2xy=-4 \end{cases}$ ① + ② $2x^2=2$ $x=\pm1$

Om $x=1$ så, enligt ③ har vi $2\cdot1\,y=-4 \Rightarrow y=-2$

$2\cdot(-1)y=-4 \Rightarrow y=2$ dvs $(x,y)=(-1,2)$

$\therefore \sqrt{-3-4i} = \pm(1-2i)$

Så är $z_1 = 1+i+(1-2i) = \boxed{2-i}$ och $z_2 = (1-i)-(1-2i) = \boxed{3i}$

2015-11-05 föreläsning 3 LV1

6.4 (fort) Binomiska ekvationer $z^n = z_0$ positivt heltal

Skriv $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ så gäller (sats) lösningar till ekvationen $z^n = r_0 e^{i\theta_0}$

är $z_k = r_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta_0+2\pi k}{n}}$ för $k=0,1,2,\ldots n-1$

Bevis: Antag att $z = re^{i\theta}$ är en lösning. Då är $(re^{i\theta})^n = r_0 e^{i\theta_0}$

dvs. $r^n e^{i\theta n} = r_0 e^{i\theta_0}$ som är ekvivalent med

$\begin{cases} r^n = r_0 \\ n\theta = \theta_0 + 2\pi k \text{ där } k=0,1,\ldots n-1 \end{cases}$

som ger $r = r_0^{\frac{1}{n}}$ och $\theta = \dfrac{\theta+2\pi k}{n}$

Lösningar är $z_k = r_0^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$

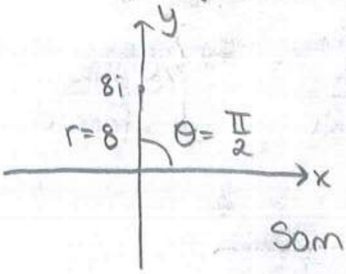
① $x+yi = a+bi \Leftrightarrow a=x$ $b=y$

② $re^{i\theta} = r_1 e^{i\theta_1} \Leftrightarrow r=r_1$ $\theta=\theta_1+2\pi k$

där $k=0,1,\ldots n-1$

Ex. Lös $z^3 = 8i$ och ange lösningar på formen $x + yi$

Lösningar:



$r_0 = |8i| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$

$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

Så ekvationen blir
$z^3 = 8e^{i\pi/2}$

Som har lösningar

$$z_k = 8^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)} \quad \text{där } k = 0, 1, \dots n-1$$

För $k=0$ har vi $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

För $k=1$ har vi $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3 + i$

För $k=2$ gäller $z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$

Sats 6,3 Varje polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} \dots a_1 z^1 + a_0$

där $a_n \neq 0$ kan faktoriseras (i komplexa faktorn)

som $p_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$ där $\alpha_1 \dots \alpha_n$

är komplexa tal.

$\therefore$ n:te gradspolynom har n stycken komplexa nollställen

Ex. $x^2 + 1 = 0$ har ingen reell lösning men har två komplexa rötter.

Observera att konstanterna $\alpha_1 \dots \alpha_n$ kan vara lika

Sats 6,4 Antag att $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z^1 + a_0$ har reella koefficienterna

$a_0, \dots, a_n$

Om $z_0 = \alpha + \beta i$ är ett nollställe till $p(z)$ så är $\bar{z}_0 = \alpha - \beta i$ ett nollställe till $p(z)$

Bevis $p(\bar{z}_0) = a_n(\bar{z}_0)^n + a_{n-1}(\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_0 = \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0}$

$a = \bar{a}$ om a är ett reellt tal. ty alla $a_0 \dots a_n$ är reella

$$= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$= \overline{p(z_0)}$$

ty z_0 är ett nollställe av $p(z)$
$= \bar{0} = 0$

Ex. Antag att vi vet $z^4-2z^3+4z-4=0$ har en rot $z=1+i$
Lös ekvationen fullständigt.

Ty ekvationen är en reell ekvation, enligt sats 6,4 vet vi att
$z_2=\bar{z}_1=1-i$ också är en rot.

Så är $z^4-2z^3+4z-4=(z-(1+i))(z-(1-i))\,\underbrace{p_2(z)}_{\text{andragrads polynom}}$

$$=((z-1)-i)((z-2)+i)\;p_2(z) = ((z-1)^2-i^2)\;p_2(z)$$

$$p_2(z)=\frac{z^4-2z^3+4z-4}{(z-1)^2+1}\overset{\text{polynomdivision}}{=}\underbrace{z^2-2}_{\text{kvot}}+\cancel{\frac{\text{rest}}{z^2-2z+2}}$$

Svar: Lösningarna är $1\pm i$, $\pm\sqrt{2}$.

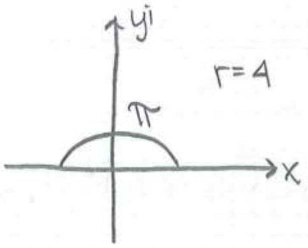
Sats 6,5 Varje reellt polynom kan skrivas som en produkt av reella första- och andragrads polynom.

Ex. 6,17 Faktorisera $p(x)=x^4+4$ i reella faktorer

Lösning: $p(x)=x^4+4 = \underbrace{(x^2)^2+2x^2\cdot 2+2^2}_{(x^2+2)^2}-(2x^2)^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$$=((x^2+2)-2x)((x^2+2)^2+2x)$$

Alt.
Vi löser ekvationen $x^4+4=0$ $\quad x^4=-4$ (Binomisk ekvation)



$x^4=4e^{i\pi}$ $\quad x_k=4^{\frac{1}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}$

dvs. $x_0=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1+i$

$x_1=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1+i$

$x_2=1-i \qquad x_3=-1-i$

Man kan alltså faktorisera $p(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$$=\underbrace{(x-(1+i))}_{①}\underbrace{(x-(-1+i))}_{②}\underbrace{(x-(1-i))}_{③}\underbrace{(x-(-1-i))}_{④}$$

$$=\underbrace{((x-1)^2+1)}_{①\cdot③}\underbrace{((x+1)^2+1)}_{②\cdot④}=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$$