2015-11-03 Föreläsning 2 LV1

6,3 fortsättning

$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ där $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

sats. ① $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ ③ $|e^{i\theta}| = 1$ ty $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

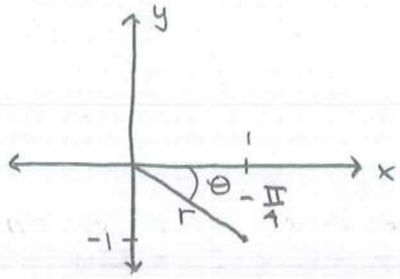
reellt

② $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ ④ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-\theta i}$

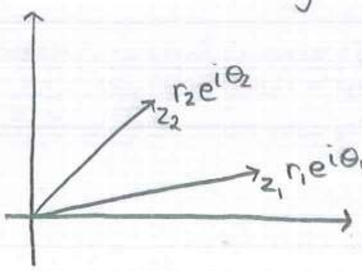
Ex. Uttrycka $z = 1 - i$ på polär form.

$r = |z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\,e^{i(-\frac{\pi}{4})}$



Geometrisk tolkning av $z_1 z_2$



$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Vid multiplication multipliceras längden och argumentet adderas.

Sats ① $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

② $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

Sats 6,1 de Moivres formel

$(e^{i\theta})^n = e^{i\theta n}$ för alla heltal n dvs. $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

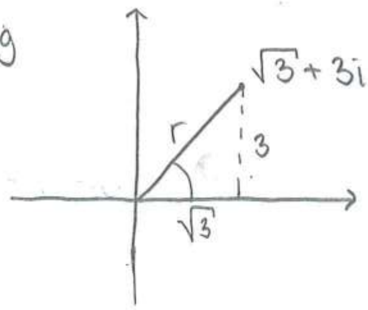
Ex. 6,10 Vi vet att $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

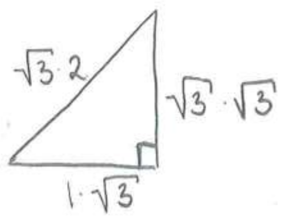
Men $VL = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\, i + (i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + 2\cos\theta\cdot\sin\theta\, i$ $= HL$

som ger $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ o $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

Ex. Beräkna $(\sqrt{3} + 3i)^{18}$

Lösning





$r = |\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$

$\therefore (\sqrt{3} + 3i)^{18}$

$= \left(2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{18}$

$= (2\sqrt{3})^{18}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{18}$

$= 2^{18} 3^9 e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 18}$

$\Rightarrow$

$= 2^{18}\cdot 3^{9}(\cos 6\pi + i\cdot\sin 6\pi) = 2^{18}\cdot 3^{9}$

ur $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ① och $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$ ②

① + ② ger $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ ① - ② ger $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ } eulers formel

Lös ekvationen $z^2 - (2+2i)z + 3+6i = 0$

- lösning: pq formel ger $z = -\dfrac{-(2+2i)}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{-(2+2i)}{2}\right)^2 - (3+6i)}$

$= 1+i \pm \sqrt{-3-4i}$

$\sqrt{-3-4i} = x+yi$. Då är $-3-4i = (x+yi)^2$ som ger $5 = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = |-3-4i|$

$= |x+yi|^2 = x^2+y^2$

och $-3-4i = x^2-y^2+2xyi$ dvs. $x^2-y^2=-3$ $2xy=-4$

Dvs. $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=-3 \\ 2xy=-4 \end{cases}$ ① + ② $2x^2=2$ $x=\pm 1$

Om $x=1$ så, enligt ③ har vi $2\cdot 1\cdot y = -4 \Rightarrow y=-2$

$2\cdot(-1)y=-4 \Rightarrow y=2$ dvs $(x,y)=(-1,2)$

$\therefore \sqrt{-3-4i} = \pm(1-2i)$

Så är $z_1 = 1+i+(1-2i) = \boxed{2-i}$ och $z_2 = (1-i)-(1-2i) = \boxed{3i}$

2015-11-05 föreläsning 3 LV1

6.4 (fort) Binomiska ekvationer $z^n = z_0$ (positivt heltal)

Skriv $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ så gäller (sats) lösningar till ekvationen $z^n = r_0e^{i\theta_0}$

är $z_k = r_0^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta_0+2\pi k}{n}}$ för $k=0,1,2,\dots n-1$

Bevis: Antag att $z = re^{i\theta}$ är en lösning. Då är $(re^{i\theta})^n = r_0e^{i\theta_0}$

dvs. $r^ne^{i\theta n} = r_0e^{i\theta_0}$ som är ekvivalent med

$\begin{cases} r^n = r_0 \\ n\theta = \theta_0 + 2\pi k \text{ där } k=0,1,\dots n-1 \end{cases}$

som ger $r = r_0^{\frac{1}{n}}$ och $\theta = \dfrac{\theta+2\pi k}{n}$

Lösningar är $z_k = r_0^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$

① $x+yi = a+bi \iff a=x \quad b=y$

② $re^{i\theta} = r_1e^{i\theta_1} \iff r=r_1 \quad \theta=\theta_1+2\pi k$

där $k=0,1,\dots n-1$