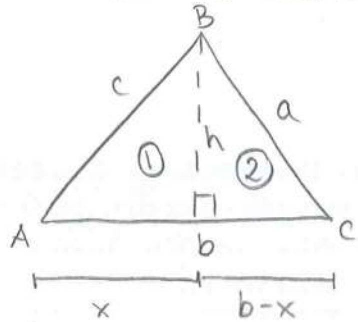
Bevis av cosinussatsen då alla vinklar är spetsiga



$$\left.\begin{aligned} &① \quad x^2+h^2=c^2 \\ &② \quad h^2+(b-x)^2=a^2 \end{aligned}\right\}$$ enligt pythagoras sats

$\frac{h}{c}=\sin A \qquad h^2=c^2-x^2 \qquad \frac{x}{c}=\cos A$

enligt triangel ①

Insättning i ② $\quad c^2-\cancel{x^2}+b^2-2bx+\cancel{x^2}=a^2$

$$a^2=b^2+c^2-2bx = \underbrace{b^2+c^2-2bc\cdot\cos A}_{\text{cosinussatsen}}$$

VSV.

Hjälpvinkelmetoden

$$a\sin \omega x+b\cos\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\omega x+\varphi)$$

---

2 november 2015 Endim B2
Föreläsning 1 Lv1
Kap 6

6,1 Ekvationen $x^2=-1$ har ingen reell lösning. Vi inför den imaginära enheten $i=\sqrt{-1}$ som uppfyller $i^2=-1$

Ett komplext tal z kan skrivas som

$z=x+yi$, där x och y är reella tal.

Skriv. $\mathrm{Re}(z)=x$ som kallas realdelen av z

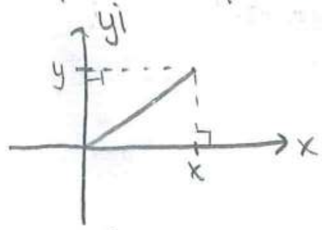
$\mathrm{Im}(z)=y$ som kallas imaginärdelen av z

Ex. $\mathrm{Re}(3-4i)=3$

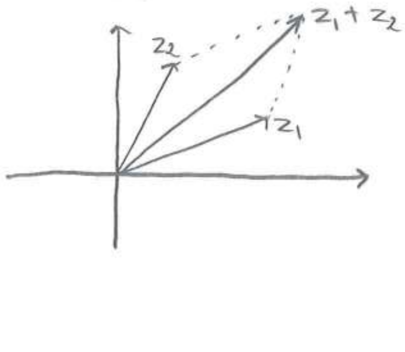
$\mathrm{Im}(3-4i)=-4$

Ett reellt tal kan betraktas som ett komplext tal.

Komplexa talplanet



Ett komplext tal $x+yi$ svarar mot endast en punkt (x,y) (eller ortsvektor till punkten (x,y))



Problem: Hur definierar man $\frac{z_1}{z_2}$? dvs. $\frac{x_1+y_1 i}{x_2+y_2 i}$

Ex. $\frac{4-9i}{3} = \frac{4}{3} - \frac{9}{3}i = \frac{4}{3} - 3i$

Man använder konjugatet för att def. division mellan två komplexa tal.
konjugat: $\bar{z}$

Sats. $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Ex. För $x+yi$ gäller $\bar{z} = x+yi$ och $z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - yi \cdot yi$

$= x^2 + y^2$ ett reellt tal.

Absolutbeloppet av ett komplext tal är $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = z\bar{z}$

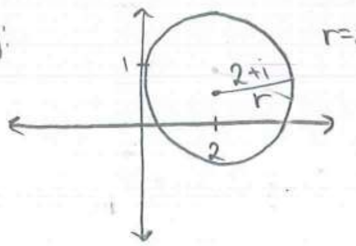
Sats ① $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

② $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

③ $|z_1 - z_2|$ = avståndet mellan punkterna z_1 och z_2

Rita kurvan $|z-(2+i)| = 2$

Lösning:

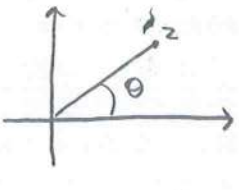


r=2

$\therefore |z-(2+i)| = z$ är ekvationen till cirkeln med medelpunkten $2+i$ och radien 2.

6.2. Def. $\frac{z_1}{z_2} \overset{def}{=} \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \overset{dvs.}{=} \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

6.3. Polär form $z = x+yi$



θ kallas ett argument till talet $z = x+yi$
skrivs $\theta = \arg z$ för att uttrycka "θ är ett argument av z".

$\therefore \theta = \arg z \Rightarrow \theta \pm 2\pi = \arg z$

Sats. $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$ dvs $z = x+yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
polära formen av talet z.