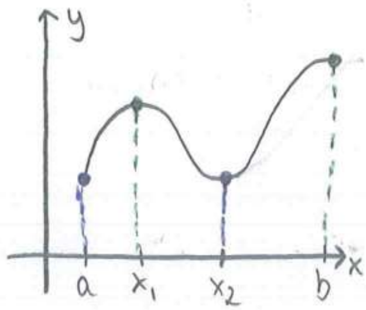
Föreläsning 2015-10-08

10,5 Lokala extrempunkter



☆ Lokalt maximum: $f(x_1)$ och $f(b)$
Lokala maximipunkter: x_1 och b

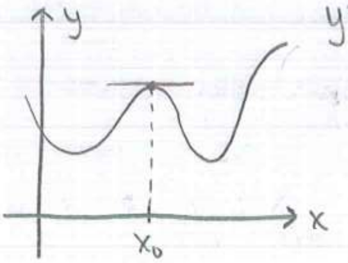
☆ Lokalt minimum: $f(x_2)$ och a
Lokala minimipunkter: x_2 och b

OBS! Lokal extrempunkter = ☆ och ☆

Sats 10.6 x_0 är en lokal extrempunkt till $f(x)$ och $f'(x_0)$ existerar

$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$, dvs x_0 är en stationär punkt till $f(x)$

Idé av beviset

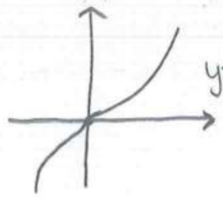


$y = f(x)$ Tangentlinjen i x_0 är parallell med x-axeln

$\Rightarrow$ Dess riktningskoefficient $f'(x_0) = 0$

OBS! $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ är en lokal extrempunkt till $f(x)$

Ex.



$y = x^3$ Vi har $f(x) < f(0) = 0 < f(x)$
för $x<0$ för $x>0$

$f(0)$ är inte lokalt max eller lokalt min.

Följdsats En (lokal) extrempunkt x_0 till $f(x)$ i ett intervall I måste uppfylla ett av följande villkor

① $f'(x_0) = 0$ ...(stationärpunkt) ② x_0 är en ändpunkt till intervallet I

③ $f'(x)$ existerar inte ... (singulär form)

Ex. Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ där $1 \leq x \leq \infty$

Lösning: Leta efter alla intressanta punkter

① Stationärpunkter: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 - \ln x = 0$

$\Longleftrightarrow x = e$

② Ändpunkt: $x = 1$

③ Singulärpunkter: Ingen

x	1		e		∞
$f'(x)$	ej def	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	
	↑ lokalt minimipunkt		↑ lokalt maximipunkt		

Svar:

$x = 1$ lok min

$x = e$ lok max

Sats (Andra derivatan test s. 238)

① $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ är lokalt min till $f(x)$

② $f'(x_0)=0$ och $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ är lokalt max till $f(x)$

Ex. Bestäm alla lokala extrempunkter till $f(x)=e^{-(x^2)}$ i $\mathbb{R}=]-\infty,\infty[$

Lösning: Intressanta punkter

① Stationära punkter: $f'(x)=e^{-(x^2)}\cdot 2x=0$ $x=0$ är stationärpunkt

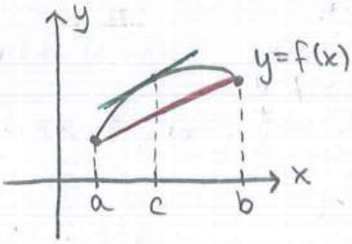
② Ändpunkt: Ingen ③ Singulärpunkt: Ingen

Men $f''(x)=e^{-x^2}\cdot(-2x)^2-2e^{-x^2}$ som ger $f''(0)=0-2<0$
Enligt andraderivatatest är $x=0$ ett lokalt max.

(10,6) Sats 10,7 Medelvärdessatsen

$f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ och $f'(x)$ existerar i $]a,b[$
$\Rightarrow$ Det finns $a<c<b$ så att

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Slutsats: Någon tangentlinje är parallell med sträckan.

Ex. Visa att $|\cos t-\cos s|\le|t-s|$ för alla $-\infty<x<\infty$

Bevis: Låt $f(x)=\cos x$ i $[t,s]$ $\because f(x)$ är kontinuerlig i $[t,s]$ och deriverbar i $]t,s[$

Medelvärdessatsen ger $f(s)-f(t)=f'(c)(s-t)$ för något $t<c<s$

dvs. $\cos s-\cos t=(-\sin c)(s-t)$

$\because |\cos s-\cos t|=|-\sin c\,(s-t)|=|-\sin c|\cdot|s-t|\le|s-t|$

Sats $f(x)=C$ för $a<x<b \Leftrightarrow f'(x)=b$ för alla $a<x<b$
↑
konstant

Bevis "$\Rightarrow$" trivial

"$\Leftarrow$" För två godtyckliga punkter $a<x_1<x_2<b$, gäller

$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0\,(x_2-x_1) \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$

som medför att $f(x)$ är konstant i $]a,b[$

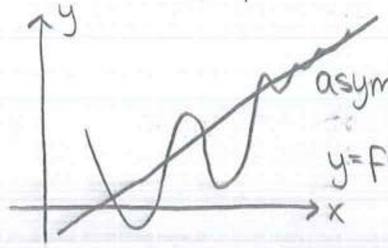
Sats 10,8 ① $f'(x) > 0$ i $]a,b[\Rightarrow f(x)$ är strängt växande i $]a,b[$
$(<)$ (avtagande)

② $f'(x) \geq 0$ i $]a,b[\Rightarrow f(x)$ är växande i $]a,b[$
$(\leq)$ (avtagande)

Bevis av ① För godtyckliga $a < x_1 < x_2 < b$ har vi $f(x_2) - f(x_1) = \underset{\text{för ngt } c}{f'(c)(x_2 - x_1)} > 0$
dvs. $f(x_2) > f(x_1)$, $\therefore f(x)$ är strängt växande i $]a,b[$

Förelösning 2015-10-09

Sneda asymptoter $y = kx + m$



Linjen $y = kx + m$ kallas en sned asymptot till $y = f(x)$ om

$f(x) - (kx + m) \longrightarrow 0$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$

dvs. $f(x) = kx + m + g(x)$ där $g(x) \to 0$ då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$

Ex. $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x}$ ty $g(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$ då $x \to \pm\infty$

Så är linjen en asymptot till $f(x)$ då $x \to \pm\infty$

Sats $y = kx + m$ är en asymptot till $f(x)$, $k \to \infty$

$$\Longleftrightarrow \quad k = \lim_{k \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{och} \quad m = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) \quad \text{existerar ändligt}$$

Bevis "$\Rightarrow$" $y = kx + m$ är asymptot till $f(x)$ då $x \to \infty$, så är

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left[\underbrace{\frac{f(x) - (kx+m)}{x}}_{\to \infty} + \underbrace{\frac{kx+m}{x}}_{\to k} \right] = k$$

och $$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left[\underbrace{f(x) - (kx+m)}_{\to 0} + m \right] = m$$

"$\Leftarrow$" $$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (kx+m) \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\underbrace{f(x) - kx}_{\to m} - m \right] = m - m = 0$$

som medför att $y = kx + m$ är asymptot till $f(x)$

Ex. Bestäm asymptoter till $y = \frac{x^3 - x}{x - 2}$

Lösning:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-x}{(x^2-2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)\cancel{x}} = 1$$

och $$m = \lim_{x\to\infty} (f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x}{x^2-2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}-x-x(\cancel{x^2}-2)}{x^3-2}$$

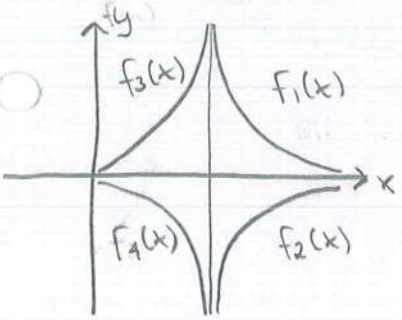
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\underbrace{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}_{\infty}} \overset{\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}}{=} 0$$

$\therefore$ $y = kx+m$, dvs $y=x$ är asymptot till $y=f(x)$ då $x\to\infty$

Analogt vet vi att $y=x$ är asymptot till $y=f(x)$ då $x\to-\infty$

Ex. $f(x)=x^2$ $\quad k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$, $f(x)$ saknar asymptot då $x\to\infty$

Lodräta asymptoter $x = a$ ← tal



Linjen $x=a$ är lodrät asymptot till $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$

Ex. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} \overset{\frac{1}{+0}}{=} \infty$

$\Rightarrow$ $x=1$ är lodrät asymptot till $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Ex. Rita grafen av $f(x) = x + \frac{4}{x}$ där $x \neq 0$

Lösning Intressanta punkter

① Stationära punkter $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$x = \pm 2$

② Singulära punkter: Ingen

③ Ändpunkten $x=0$ $\quad -\infty \quad 0 \quad \infty$

ⓐ Asymptoter $f(x) = x + \frac{4}{x} = x + \underbrace{g(x)}_{0}$ då $x\to\infty$ eller $x\to-\infty$

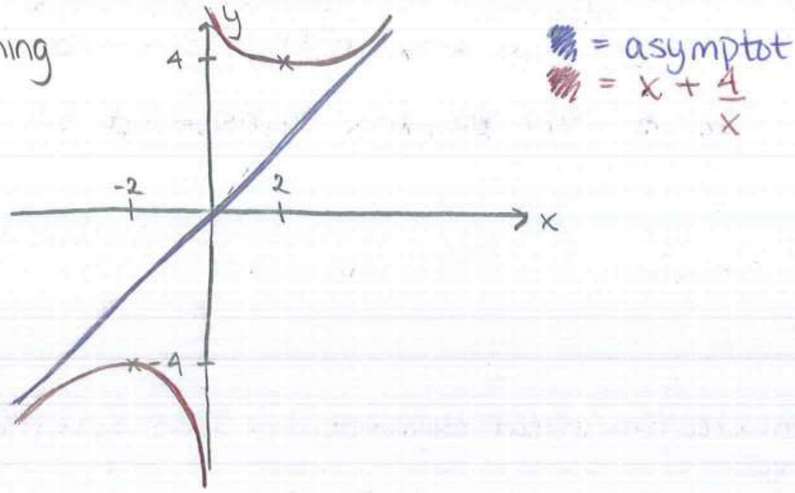
$\Rightarrow$ $y=x$ är (sned) asymptot till $f(x)$ då $x\to\pm\infty$

och $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{4}{x}\right) = -\infty \Rightarrow x=0$ är asymptot då $x\to 0^-$

Ⓒ Teckenschema

x	$-\infty$		-2		0		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	ej def	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-4	↘		↘	4	↗	

Ⓓ Ritning



Optimering

Sats 9,9 säger att varje kontinuerlig funktion har både maximum och minimum i $[a,b]$

Ex. Bestäm max och min för $f(x) = \frac{1}{x} - 2 + 2\arctan x$ i $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$

Lösning Ⓐ Intressanta punkter

① Stationärpunkt $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{-(1+x^2) + 2x^2}{x^2(1+x^2)}$

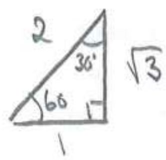
$$= \frac{-1+x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2(1+x^2)} = 0 \iff x = \pm 1$$

Men $x=-1 \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$ falskt $\quad$ $x=1$ är endast stationärpunkt

② Singulärpunkt: Ingen $\qquad$ ③ Ändpunkter: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \sqrt{3}$

Ⓑ Jämför funktionsvärde i dessa hittade punkter

$f(1) = -1 + \frac{\pi}{2} = 0{,}570\ldots$ (minimum)

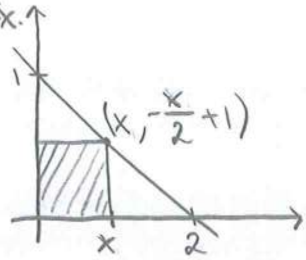


$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$f(1/\sqrt{3}) = \ldots = 0{,}779\ldots$ (maximum)

$f(\sqrt{3}) = \ldots = 0{,}671\ldots$ ← ty $\arctan\sqrt{3}$

Ex.



$y = -\frac{x}{2} + 1$

Bestäm den största arean av sådana rektanglar.

Lösning: Rektangeln i figuren har arean $A = xy = x\left(-\frac{x}{2}+1\right) = \frac{-x^2}{2} + x$

Problemet blir följande: Maximera $A(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ i $0 < x < 2$

Men $A(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ där $0 < x < 2$ har samma maximus som

$A(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ där $0 \le x \le 2$

Nu maximerar vi $A(x)$ på $[0, 2]$

Intressanta punkter

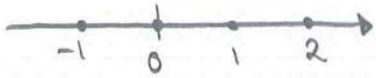
① Stationära punkter: $A'(x) = -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

② Singulär punkt: Ingen. Ändpunkt: $x=0$ $x=2$

Jämförelse: $A(1) = \frac{1}{2}$ $A(0) = A(2) = 0$ Svar: största arean $= \frac{1}{2}$

Föreläsning ① Kapitel 1

Tallinjen Reella axeln



Varje punkt i axeln svarar mot ett reellt tal.

Anm. $x \in \mathbb{R}$ ⇒ Betyder att x är ett reellt tal, dvs x är en punkt i axeln.

tillhör mängden av alla reella tal

Heltal $\mathbb{Z}$ $\ldots \underbrace{-2, -1}_{\text{negativa heltal}}, 0, \underbrace{1, 2, 3 \ldots}_{\text{positiva heltal}}$

Rationella tal $\mathbb{Q}$

alla tal $\frac{p}{q}$, där p och $q \neq 0$ är heltal

klart att $\underbrace{\mathbb{N} \subseteq}_{\text{en delmängd}} \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Irrationella tal: övriga reella tal

t.ex π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oändliga decimaler

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ betyder att x är irrationellt.

DOCK! med oändliga upprep så är det rationellt.