Föreläsning 2015-10-05

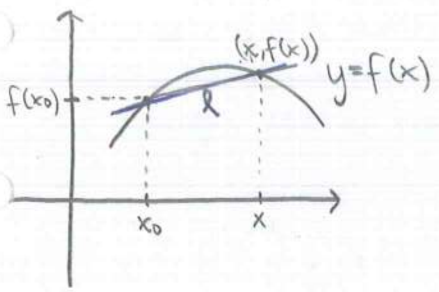
Kapitel 10 Derivator

10,1 Definition $f(x)$ sägs vara deriverbar i $x = x_0$ om $f(x)$ är definierad i en omgivning av x_0.
ett öppet intervall

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ existerar ändligt.

Gränsvärdet kallas för derivatan av $f(x)$ i x_0 och betecknas $f'(x)$ eller $\frac{df}{dx}(x_0)$ eller $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$ eller $(Df)(x_0)$

Geometrisk tolkning



Riktningskoefficienten för linjen ℓ är

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Låt $x \to x_0$ Då får vi: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ som

är riktningskoefficienten för tangentlinjen till $f(x)$ i punkten x_0

Sats ① Ekvationen av tangenter till $y = f(x)$ i x_0 är $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Normallinje: vinkelrät mot tangentlinjen. Ekvationen av normalen till $y = f(x)$ i x_0 är $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x)}(x - x_0)$

Ex. Beräkna med hjälp av definitionen $f'(x)$ för $f(x) = \sqrt{x}$

Lösning $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$ Dvs. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1}$

Allmänt gäller $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$ ← ett tal

Ex. Bestäm tangenten och normalen till $y = \sqrt{x}$ i $x = 9$

Lösning $(x_0, f(x_0)) = (9, \sqrt{9}) = (9, 3)$ och $f'(x_0) = f'(9) = \left.(x^{\frac{1}{2}})'\right|_9 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

Tangenten är $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 9)$ Normalen är $y - 3 = 6(x - 9)$

10,2 Deriveringsregler

Sats 10,1 $f'(x_0)$ existerar (dvs. $f(x)$ är deriverbar i x_0)

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, dvs. $f(x)$ är kontinuerlig i x_0

Bevis $f(x) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + f(x_0) \longrightarrow f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0)$ då $x \to x_0$

som ger $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ #

OBS! $f(x)$ är kontinuerlig i x_0 $\not\Rightarrow$ $f(x)$ är deriverbar i x_0.

Ex. $f(x) = |x|$ i $x_0 = 0$

$f(x) = |x|$ är kont. i 0 ty $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = |0| = f(0)$

Å andra sidan har vi $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

och $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x \to 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = 1$

$1 \neq -1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existerar inte dvs. $f'(x)$ existerar inte

Sats
1. $af(x) = af'(x)$
2. $f(x) \pm g(x) = f'(x) \pm g'(x)$
3. $f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Bevis av 3

$$(f(x)\,g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x)] + [f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\overbrace{f(x+h)}^{\to f(x)}\,\overbrace{[g(x+h) - g(x)]}^{\to g'(x)}}{h} + \frac{\overbrace{[f(x+h) - f(x)]}^{\to f'(x)}\,\overbrace{g(x)}^{\to g(x)}}{h} \right.$$

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$ #

Ex. $[(3x^2+5)(6x^6+8)]' = (3x^2+5)'(6x^6+8) + (3x^2+5)(6x^6+8)'$

$= 3\cdot 2x(6x^6+8) + 6\cdot 6x^5(3x^2+5) = 6x(6x^6+8) + 36x^5(3x^2+5)$

Ex. $\left(\frac{x^2+3x}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x+3)(x^2+1) + (x^2+3x)2x}{(x^2+1)^2}$

Kedjeregeln $y = f(s)$ och $s = g(x)$ $\Rightarrow$ en sammansatt funktion

$y = f(g(x))$

sats 10,3 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dx}$ dvs. $(f(g(x)))' = f'(s)\,g'(x)$ kedjeregeln

$= f'(g(x))\,g'(x)$

Ex. $((x^2+1)^{100})' = 100(x^2+1)^{99} \cdot (x^2+1)' = 200(x^2+1)^{99} \cdot x$

Ex. $\left\{[(x^2+x-1)^3+2]^4\right\}' = 4[(x^2+x-1)^3+2]^{4-1} \cdot [(x^2+x-1)^3+2]'$

$= 4[(x^2+x-1)^3+2]^3 \cdot 3(x^2+x-1)^{3-1}(x^2+x-1)'$

$= 12[(x^2+x-1)^3+2]^3(x^2+x-1)^2(2x+1)$

Föreläsning 2015-10-07

Sats 10,5

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = 1/\cos^2 x$

$(\cot x)' = -1/\sin^2 x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\boxed{-1 < x < 1}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Kom ihåg!

Ex. $(2^x)' = (e^{x\ln 2})' = \ln 2 \cdot e^{x\cdot\ln 2} = 2^x \cdot \ln 2$

Ex. $({}^a\log x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'$

$= \frac{1}{x\cdot\ln a}$

$\boxed{{}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}}$

Ex. $(x^x)' = \left(e^{x \cdot \ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$

$= x^x (\ln x + x)$

Ex. 10,14 a) $(\arctan(2x))' = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2}$

b) $\left(\frac{3}{\sin^2 x}\right)' = 3\left(\sin^{-2} x\right)' = 3(-2)\sin^{-3} x \cdot \cos x = -\frac{6\cos x}{\sin^3 x}$

Ex. 10,15 $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2x+0)\right)$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Sats 10,4 Om $y = f(x)$ kan inversen $x = f^{-1}(y)$

Så är $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ dvs. $\frac{d}{dy}\left(f^{-1}(y)\right) = \frac{1}{\frac{d}{dx} f(x)}$

Ex. Visa att $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ för $-1 < x < 1$

Bevis $y = \sin x$, där $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ har inversen $x = \arcsin y$

där $-1 \le y \le y$

$\therefore$ För $-1 < y < 1$ gäller $\frac{d}{dy}(\arcsin y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dx}\sin x} = \frac{1}{\cos x}$

$= \frac{1}{\cancel{\pm}\sqrt{1-\sin^2 x}}$ $\cos x > 0$ då $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ dvs. $\frac{d}{dy} \arcsin y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ för alla $-1 < y < 1$

#

Implicit derivering

Om $y = y(x)$ så är $\frac{d}{dx} g(y) = \underbrace{g'(y)}_{\frac{d}{dy}} \cdot \underbrace{y'}_{\frac{d}{dy} y(x)}$

Ex. Bestäm derivatan $y'(0)$ för funktionen $y = y(x)$ som uppfyller

$e^{2x} + \sin(y+1) + y^3 = 0$ för alla x och $y(0) = -1$

Lösning: Derivering av båda leden med avseende på x ger:

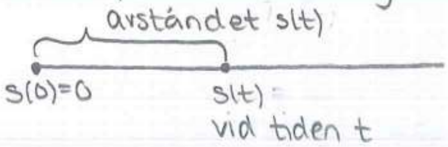
$$e^{2x}\cdot 2 + \cos(y+1)\cdot \frac{d}{dy}(y+1)\cdot y' + 3y^2\cdot y' = 0 \quad \text{för alla } x$$

Insättning av $x=0$ i den sista likheten ger

$$e^{2\cdot 0}\cdot 2 + \cos(\underbrace{y(0)}_{(-1)}+1)\cdot 1\cdot y'(0) + 3\,(\underbrace{y(0)}_{(-1)})^2\cdot y'(0) = 0$$

dvs. $2 + y'(0) + 3y'(0) = 0 \Rightarrow y'(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

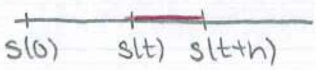
Ex. En partikel rör sig i en rät linje



$s(t)$ är avståndet vid tiden t

$s'(t)$ är hastighet vid tiden t

Varför?

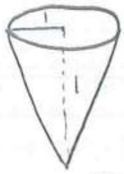


genomsnitts hastigheten av partikeln under tidsintervallet $[t, t+h]$ är $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$

$\lim_{h\to 0} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = s'(t)$ som betraktas som hastigheten vid tiden t.

$s''(t) = (s'(t))' \Rightarrow$ acceleration

Ex. 10,17 En vattentank ser ut som en cirkulär kon med radien 1 och höjden 1



Vatten fylls på med hastigheten $1\,m^3/h$

Vattenvolym $V = V(t)$ och vattenhöjd $h(t)$ beror på tiden t.

Fråga: Hur snabbt ökar vattenhöjden vid tidpunkten t_0 då vattendjupet är $h(t_0) = \frac{2}{3}$ m

Lösning: Vi vet att $V'(t) = 1\ m^3/h$ för alla t

Leta efter samband mellan $V(t)$ o $h(t)$ eftersom $V(t) = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2(t)\cdot h(t)$

$\frac{r(t)}{h(t)} = \tan\alpha = \frac{1}{1}$ dvs. $r(t) = h(t)$

$V(t) = \frac{\pi}{3}h^3(t)$ som ger $V'(t) = \frac{\pi}{3}\cdot 3h^2(t)\cdot h'(t)$ för alla t.

Speciellt för $t=t_0$ gäller $1 = \pi\left(\frac{2}{3}\right)^2 h'(t_0) \Rightarrow \frac{9}{4\pi} = h'(t_0)$