Föreläsning 2015-09-24

Kap 4 Summatecken $\sum$

Vi inför $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \overset{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Ex.

ⓐ $\displaystyle\sum_{j=2}^{5} j^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

ⓑ $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} 6 = \overbrace{6+6+\ldots+6}^{\text{antalet termer : } 10-3+1=8}$

Egenskaper

① $\displaystyle\sum_{j=n}^{m} a = (m-n+1)a$

② $\displaystyle\sum_{j=n}^{n} b\cdot a_j = ba_1 + ba_2 + \ldots + ba_n$

$= b(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = b\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$

Bryt ut konstanter

③ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j) = (a_1+b_1) + (a_2+b_2) + \ldots + (a_n+b_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$

$= \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j$

Aritmetisk summa

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$= \dfrac{[1+2+3+\ldots+n] + [1+2+3+\ldots+n]}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Ex. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} 2+3k = \sum_{k=1}^{100} 2 + 3\sum_{k=1}^{100} k = (100-1+1)\cdot 2 + 3\cdot\frac{100(100+1)}{2}$

$= 200 + 15150$

Geometrisk summa

$$\sum_{j=0}^{n} x^j$$ där x är en konstant

$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^4$

Sats $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \overset{dvs}{=} \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ då $x \neq 1$

Bevis $S = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$, $S - xS = 1 - x^{n+1}$

Då är $x \cdot S = x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}$ $S(1-x) = 1 - x^{n+1}$

$S = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ om $x \neq 0$

Allmänt

$$\sum_{k=n}^{m} b \cdot a^k = \frac{ba^n - ba^{m+1}}{1-a} \quad \text{för } a \neq 1$$

4.2 Binomialsatsen $(a+b)^n$

Def ① $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ kallas n-fakultet

$0! = 1$ alltid 1

Ex. På hur många sätt kan man välja en ordförande, sekreterare, kassör ur 5 pers?

Lösning Först väljer vi ordförande - 5 möjligheter

Sedan återstår 4 möjligheter för att välja sekreterare

3 möjligheter för att välja kassör

antalet sätt $= 5 \cdot 4 \cdot 3$

$\dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5!}{(5-3)!}$

Problemet i exemplet kan formuleras på följande sätt:

Ur 5 olika personer väljer vi 3 personer som står i kö. (ordning spelar ej roll)

Hur många köer finns det?

Svar: $\dfrac{5!}{(5-3)!}$

Ex. På hur många sätt kan man välja 3 personer ur 5 pers. så att de bildar en grupp?

Lösning: 3 pers väljs på $\frac{5!}{(5-3)!}$ sätt om ordning ej spelar roll.

Men varje grupp av 3 pers kan ordnas på 3! olika sätt

antalet grupper = antal köer/3!

Dvs. $\frac{5!}{3!(5-3)!} \Rightarrow \binom{5}{3}$

Def. Binomialkoefficienten

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Ex. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot 1} = 1$ Ex 2. $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = 1$

dvs. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$

Ex. $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 5\cdot 2 = 10$ $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

allmänt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

OBS! $\binom{n}{k}$ kan bestämmas med Pascals triangel

										n
				1						
			1		1					1
		1		2		1				2
	1		3		3		1			3
1		4		6		4		1		4
$\binom{n}{0}$		$\binom{n}{1}$		$\binom{n}{2}$		$\binom{n}{3}$		$\binom{n}{4}$		

Binomialsatsen

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Skrivs $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$

Ex. $(x-1)^3 = (x+(-1))^3$

$$= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2\cdot(-1) + \binom{3}{2}x\cdot(-1)^2 + \binom{3}{3}(-1)^3$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Bestäm koefficienten till x^{16} i utvecklingen av $(2+x^2)^{18}$

$$(2+x^2)^{18} = \sum_{j=0}^{18}\binom{18}{j}\cdot 2^{18-j}\,(x^2)^j = \sum_{j=0}^{18}\binom{18}{j}2^{18-j}\cdot x^{2j}$$

Låt $2j=16 \quad j=8$

x^{16} har koefficienten $\binom{18}{8}\cdot 2^{18-8} = \binom{18}{8}\cdot 2^{10}$

Seminarium 3

Tentauppgifter

① Lös $\sin(2x) = -\cos x$ (0,5p)

Lösning: $-\sin(2x) = \cos x \iff \sin(-2x) = \cos x$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right) = \cos x$ som ger $\frac{\pi}{2} + 2x = \pm x + n\cdot 2\pi$

dvs. $x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\pi$ n heltal

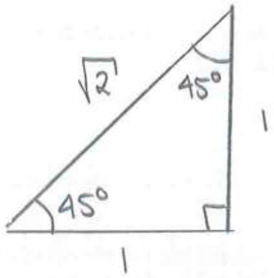
eller

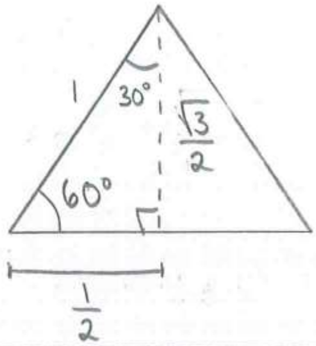
$x = \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)$

② Bestäm koefficienten framför x^{17} i polynomet $p(x) = (1+4x)(2x^4-1)^6$ (0,4p)

Lösning: $p(x) = (1+4x)\cdot\Big\{(2x^4)^6 + \binom{6}{1}(2x^4)^5\cdot(-1)^1 + \underline{\binom{6}{2}(2x^4)^4(-1)^2} + \binom{6}{3}(2x^4)^3(-1)^3 + \binom{6}{4}(2x^4)^2\cdot(-1)^4 + \binom{6}{5}(2x^4)\cdot(-1)^5 + \binom{6}{6}(-1)^6\Big\}$

x^{17} har koefficienten: $4\cdot\binom{6}{2}\cdot 2^4\cdot(-1)^2 = 4\,\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot 16 = 960$





Lathund

Kom ihåg trianglarna!

α (grader)	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α (radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ej def	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot\alpha$	ej def	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	ej def

---

4,18 i övningsbok: Bestäm den konstanta termen i $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{15}$

Lösning: $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} \cdot (x^2)^{15-k} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{30-2k} \cdot \frac{1}{x^{3k}} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} x^{\overbrace{30-2k-3k}^{-5k}}$$

Låt $30-5k=0 \iff k=6$ konstanten är $\binom{15}{6}$

(3) Beräkna $\sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 3^{20-k} (-2)^k$ (0,4 p)

Lösning:

$A = (3+(-2))^{20} = 1^{20} = 1$

④ Beräkna $\binom{12}{0}+\binom{12}{1}+\binom{12}{2}+\ldots+\binom{12}{11}+\binom{12}{12}$ (0,3p)

Lösning: $\binom{12}{0}+\binom{12}{1}+\ldots+\binom{12}{12}=(1+1)^{12}=2^{12}$

och $\binom{12}{0}+\binom{12}{1}(-1)^1+\binom{12}{2}(-1)^2+\binom{12}{3}(-1)^3+\ldots+\binom{12}{12}(-1)^{12}=(1-1)^2=0$

dvs. $\binom{12}{6}-\binom{12}{1}+\binom{12}{2}-\binom{12}{3}+\ldots+\binom{12}{12}=0$

① + ② ger $2\binom{12}{0}+2\binom{12}{2}+\ldots+2\binom{12}{12}=2^{12}+0$

$\Rightarrow \binom{12}{0}+\binom{12}{2}+\ldots+\binom{12}{12}=2^{11}$

8,60. Visa att: $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x+\cos x)$

Bevis: VL: $\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(\sin x+\cos x)=HL$

④ Bevisa additionformeln för sinus. (Du får använda alla satser som står i boken) (0,5p)

Bevis: $\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

Vi deriverar båda leden med avseende på x ger:

$-\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$

$\Leftrightarrow \sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$

⑥ Lös $\ln(\sin x)=\ln(\cos x)$

Lösning: $\ln(\sin x)=\ln(\cos x)$ ty $\sin^2x+\cos^2x=1$

$\Rightarrow e^{\ln(\sin x)}=e^{\ln(\cos x)} \Rightarrow \sin x=\cos x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=1 \Leftrightarrow \tan x=1$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+n\pi$ n heltal