Föreläsning Kap 8 Elementära funktioner 2015-09-17

Potens a^b ← exponent, bas ↑

8.1 Polynomfunktioner

$f(x) \overset{def}{=} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ där alla konstanter a är givna.

Rationella funktionen $f(x) = \dfrac{p(x)}{g(x)}$ där p(x) och g(x) är polynom

Ex $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x^2-1}$ är en rationell funktion

med $D_f = \{x \in \mathbb{R} ; x^2 \neq 1\}$

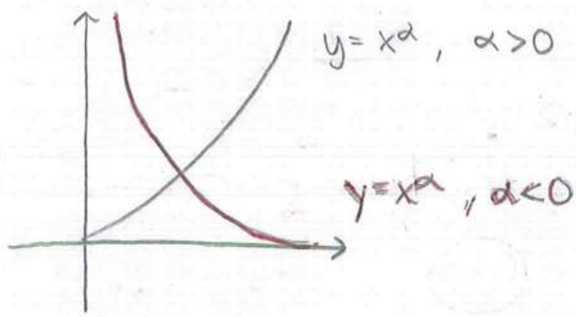
$\mathbb{R}$: mängden av alla reella tal.

2. Potensfunktionen

$f(x) \overset{def}{=} x^\alpha$, där $x > 0$ Där α är ett fixt reellt tal

Ex. $f(x) = x^3$ $g(x) = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ är en potensfunktion

graf av x^α



Sats 8.1 ① $f(x) = x^\alpha$ med $\alpha > 0$ är (strängt) växande för $x > 0$

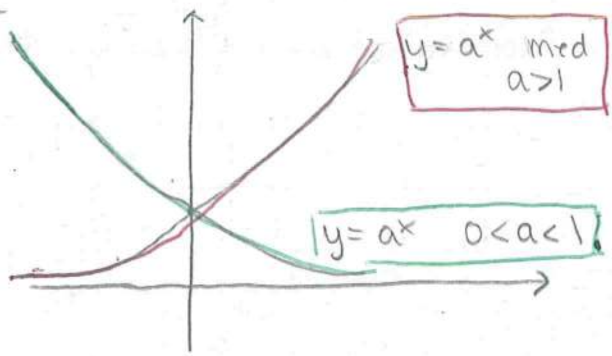
② $f(x) = x^\alpha$ med $\alpha < 0$ är (strängt) avtagande för $x < 0$

Exponentialfunktioner:

$f(x) \overset{def}{=} a^x$ där $-\infty < x < \infty$, dvs $x \in \mathbb{R}$

Där konstanten $a > 0$ och $a \neq 1$

$f(x) = 2^x$ och $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ graf av a^x



Sats 8.2

① om $a > 1$ så är a^x strängt växande

② om $0 < a < 1$ så är a^x strängt avtagande

8,3 Lösningen till ekvationen

$2^x = 3$ skrivs som

$x = {}^2\lg 3$

a- logaritm

Allmänt gäller $a^x = y \Leftrightarrow x = {}^a\log y$ (★)

Sats ① $a^{{}^a\log y} = y$

② ${}^a\log(b^x) = x\,{}^a\log b$

③ ${}^a\log a = 1$

Bevis ① Ur (★) vet vi $y = a^x = a^{{}^a\log y}$

③ Sätt in att $y = a$ i (★): $x = {}^a\log a \Rightarrow a^x = a \Rightarrow x = 1$

② ${}^a\log(b^x) = x\,{}^a\log b \Leftrightarrow a^{{}^a\log(b^x)} = a^{x\,{}^a\log b}$

$\Leftrightarrow b^x = \left(a^{{}^a\log b}\right)^x$

$b^x = b^x$ som är triviall □

Ex. ⓐ ${}^3\log 16 = {}^3\log(2^4) = 4\,{}^3\log 2 = 4$

ⓑ ${}^4\log 2 = {}^4\log 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,{}^4\log 4 = \frac{1}{2}$

ⓒ ${}^{10}\log \frac{1}{1000} = {}^{10}\log 10^{-3} = -3 \cdot {}^{10}\log 10 = -3$

Logaritmlagar För $x > 0$, $y > 0$ gäller

④ ${}^a\log 1 = 0$

⑤ ${}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y$

⑥ ${}^a\log\left(\frac{x}{y}\right) = {}^a\log x - {}^a\log y$

⑦ ${}^a\log x = \frac{{}^c\log x}{{}^c\log a}$ basbyte

Bevis av ⑤

${}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y \Leftrightarrow a^{{}^a\log(xy)} = a^{{}^a\log x + {}^a\log y}$

$xy = a^{{}^a\log x} \cdot a^{{}^a\log y}$

$xy = xy$ vilket är sant. □

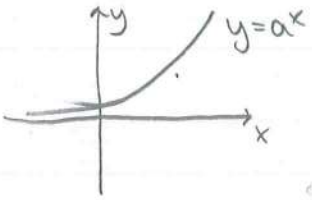
Inversen till funktionen

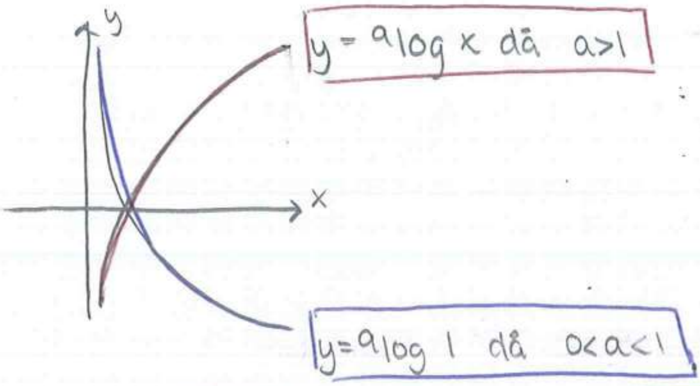
$a^x = y \iff x = {}^a\log y$

Logaritmfunktionen $f(x) = {}^a\log x$, där $x > 0$

OBS! Basen $a \neq 0$ och $a > 0$

graf av ${}^a\log x$:





Sats ① ${}^a\log x$ är växande då $\boxed{a > 1}$ och avtagande då $\boxed{0 < a < 1}$

② ${}^a\log x$ är inversfunktionen av a^x

③ $\ln x = {}^e\lg x$, där $x > 0$ där $e = 2{,}71828\ldots$

Ex. 8,8 Lös $2\ln x = \ln(x+2)$ $(\ln x)^2 \neq 2\ln x$ $\ln x^2$

$2\ln x = \ln(x+2)$

$\ln(x^2) = \ln(x+2)$

$x^2 = x + 2 \iff x = -1$ eller $x = 2$

använd pq formel

Verifieringar ger att $x = 2$ är en rot $\underline{o}$ $x = -1$ är en falsk rot

då $\ln(-1)$ är ej definerad

Ex. Lös $3^{x^2} = 9^x$ OBS! $a^{b^c} = a^{b^c} \neq a^{(b)^c} = a^{bc}$

$\ln 3^{x^2} = \ln 9^x \iff x^2 \ln 3 = x \cdot \ln 9 \; 3^2 = x^2 \cancel{\ln 3} = 2x \cancel{\ln 3}$

då får vi $x^2 = 2x$ $x^2 - 2x = 0$ $x(x-2)$ $x = 0$ $x = 2$