Föreläsning 2015-09-28

Kap 9 Gränsvärde

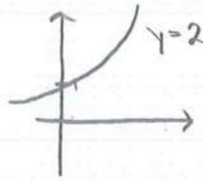
9,1

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$ ← tal, ∞, $-\infty$

eller $f(x) \to A$ då $x \to \infty$

om $f(x)$ närmar sig A då x närmar sig ∞

Ex. $\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$



Ex. $\lim_{x\to\infty} 2^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = 0$

dominerande term

Ex. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x^2-1}{4x^3-x^2+x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(4-\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$$

dominerande term

$$= \frac{1}{4}$$

alla dessa går mot 0

dominerande term = som går mot ∞ snabbast.

Ex. $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}+x\right) = \infty + \infty = \infty$$

$\sqrt{x^2-x} \to \infty$, $x \to \infty$

Ex. $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-x\right) = \boxed{\infty-\infty \text{ ej definierat}}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x}-x)(\sqrt{x^2-x}+x)}{\sqrt{x^2-x}+x} = \frac{(\sqrt{x^2-x})^2-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \cancel{\text{“}\frac{-\infty}{\infty}\text{”}}$$

$-x \to -\infty$, $\sqrt{x^2-x} \to \infty$, $x \to \infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x})}+x} = \frac{-x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x} = \frac{\cancel{-x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \to 1$

OBS! Följande uttryck är obestämda $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^∞, 0^0, ∞, $\frac{0}{0}$

Sats $$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{begränsad funktion}}{\text{funktion}} = \text{“}\frac{\text{begr.}}{\infty}\text{”} = 0$$

$|a+b| \neq |a|+|b|$

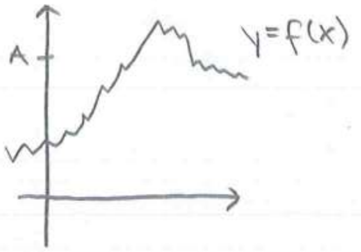
$|ab| = |a|\cdot|b|$

Ex. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} \overset{\text{“}\frac{\text{begr}}{\infty}\text{”}}{=} 0$$ ty, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \to 0$ då $x \to \infty$

Matematiska definitionen av gränsvärde

Def. 9,1 Vi skriver $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal $w_\varepsilon > 0$ så att

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{för alla } x \in D_f \text{ med } x > w_\varepsilon$$



dvs. skillnaden $f(x) - A$ är hur liten som helst om x är tillräckligt stort.

Ex. Visa att $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ Beviset står på sidor 164-165 i boken

Sats 9,1 Följande gäller

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) \overset{+}{\underset{/}{\cdot}} g(x)\right) = \lim_{x\to\infty} \overset{+}{\underset{/}{\cdot}} \lim g(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\neq \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \ ?$$

Ex. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}+1\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\underset{\downarrow\,1}{1} - \underset{\downarrow\,0}{\frac{2}{x}} + \underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{x^2}}\right)\left(\underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{x}} + \underset{\downarrow\,1}{1}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Vi vet att för ett tal $c > 0$ gäller

① $\ln x \to \infty$ då $x \to \infty$ långsammast

② $x^c \to \infty$ då $x \to \infty$

③ $e^x \to \infty$ då $x \to \infty$ snabbast

sats 9,3 $\ln x \ll x^c \ll e^x$ då $x \to \infty$

dvs. $\dfrac{\ln x}{x^c} \to 0$ då $x \to \infty$ $\quad \dfrac{x^c}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$

$\dfrac{\ln x}{e^x} \to 0$ då $x \to \infty$

Obs. I satsen ovan kan basen e bytas av ett tal $a > 1$

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty} (\underset{\infty}{\underset{\uparrow}{e^x}} - \underset{-\infty}{\underset{\uparrow}{2\ln x}}) = \lim\limits_{x\to\infty} \underset{\infty}{\underset{\downarrow}{e^x}}\left(1 - \underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{2\ln x}{e^x}}}\right) = \infty$

OBS! $0\cdot\infty$ är obestämd.

Ex. 9,11 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x + \ln x}{3e^x + x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 + \overset{0}{\overset{\uparrow}{\frac{\ln x}{e^x}}}\right)}{\cancel{e^x}\left(3 + \underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{x^2}{e^x}}}\right)} = \frac{1}{3}$

Ex. $\lim\limits_{x\to 0+} x^2 \cdot \ln x \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim\limits_{t\to\infty} \underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{-\ln t}{t^2}}} = 0$

$x\to 0+ \iff x\to 0$ och $x>0$

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{\ln x}{x^{1/3}}}}\right)^3 = 0^3 = 0$

Sats 9,3 (talet e)

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{"1^\infty"}{=} e$

Sats $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$x\to\infty$ eller $x\to-\infty$

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \overset{"1^\infty"}{=} \left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)\right)^t\right)^2 = e^2$ $\left(t=\frac{x}{2}\right)$

Föreläsning 2015-09-30

9,2 och 9,4

Standardgränsvärde

① $\ln x \ll x^c \ll e^x$ då $x\to\infty$ ($c>0$)

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x - 2e^x + x^{10} + 2^x}{e^x + \ln x - x - 2^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(\overset{0}{\overset{\uparrow}{\frac{\sin x}{e^x}}} - 2 + \overset{0}{\overset{\uparrow}{\frac{x^{10}}{e^x}}} + \overset{0}{\overset{\uparrow}{\left(\frac{2}{e}\right)^x}}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{\ln x}{e^x}}} - \underset{0}{\underset{\downarrow}{\frac{x}{e^x}}} + \underset{0}{\underset{\downarrow}{\left(\frac{2}{e}\right)^x}}\right)} = \frac{-2}{1} = -2$

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \overset{"\infty^0" \text{ obestämd}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} e^{(\ln x^{(\frac{1}{x})})} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\overset{0}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}} = e^0 = 1$

② $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to\infty}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

Ex. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\Bigg[\underset{e}{\underset{\downarrow}{\left(1+\frac{1}{\frac{-x}{3}}\right)^{\frac{-x}{3}}}}\Bigg]^{\cdot(-3)} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ty $VL = \lim\limits_{x\to 0} \ln\Big[\underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\to e}\Big] = \ln e = 1$

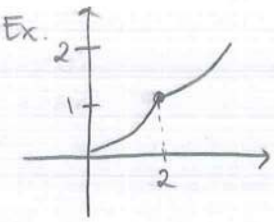
Ex. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}^{\to 1}\, 3x}{\underbrace{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}_{\to 1}\, 2x} = \dfrac{3}{2}$

Vi skriver

$\lim\limits_{\substack{x\to a \\ \text{tal}}} f(x) = A$ eller $f(x)\to A$ då $x\to a$

om $f(x)$ närmar sig A då x närmar sig a $x\neq a$

OBS! ⓐ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ betyder $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ Ex.



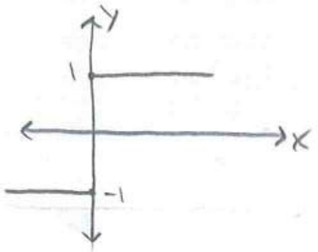
$f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$

Ex. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \dfrac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)}{1} = 0$

ⓑ Vi skriver $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ \text{tal}}} f(x) \overset{\text{betyder}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ och $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ a>x}} f(x)$

Ex. För $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x\geq 0 \\ -1 & \text{då } x<0 \end{cases}$ gäller $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$



och $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1$

Klart att vi har

Sats $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \iff \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A$

Ex. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{då } x<1 \\ 3x & \text{då } x>1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (3x) = 3$

och $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+1) = 3$

$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$ som medför

$\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

Sats 9,5 Instängningssatsen

$f(x) \le h(x) \le g(x)$ för alla x nära a

$f(x) \to A$ då $x \to a$, $g(x) \to A$ då $x\to a$ $\quad h(x) \to A$ då $x \to a$

Standardgränsvärde:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ex. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x}$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\cos 0 = 1$

$\boxed{=1}$

Ex. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}$, $\frac{\sin 2x}{2x} \to 1$, $\frac{\sin 3x}{3x} \to 1$

$\boxed{= \frac{2}{3}}$

$t = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin t$

Ex. $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1$

Ex. $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot \sin\frac{1}{x}\right) \overset{\text{"}\infty\cdot 0\text{"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$

obestämd!

Ex. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \ln x \overset{\text{"}0\cdot(-\infty)\text{"}}{=} \lim_{t\to\infty}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \ln\frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{-\ln t}{t^{1/2}} = 0$

obestämd

$t = \frac{1}{x}$

Allmänt gäller

⑤ $\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\cdot \ln x = 0$ där $\alpha > 0$

Föreläsning 2015-10-01

9.3 Kontinuerliga funktioner

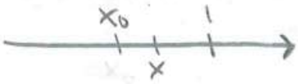
Def. $f(x)$ sägs vara kontinuerlig i x_0 om $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Longrightarrow$

Ex. Visa att $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{då } x \neq 1 \\ -1 & \text{då } x = 1 \end{cases}$

är kontinuerlig i alla punkter $x_0 \in \mathbb{R}$

$-\infty < x_0 < \infty$



Bevis: För $x_0 \neq 1$ gäller

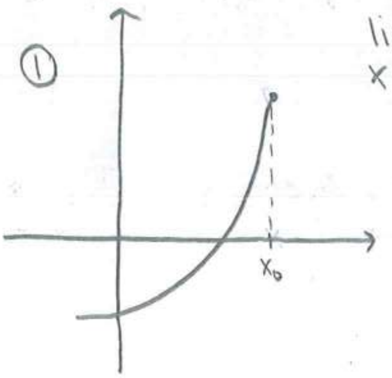
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{ty } x_0 \neq 1}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$= \frac{x_0^2 - 3x_0 + 2}{x_0 - 1} = f(x_0) \Rightarrow f(x) \text{ är kontinuerlig i } x_0$$

För $x_0 = 1$ gäller $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}$

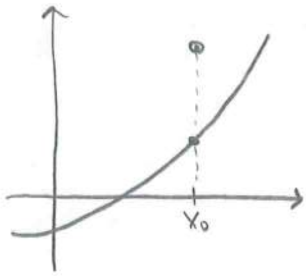
$$= \lim_{x \to 1} x-2 = 1-2 = -1 = f(1) \quad \therefore f(x) \text{ är kontinuerlig i } x_0 = 1$$

Ex.

① 

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existerar inte

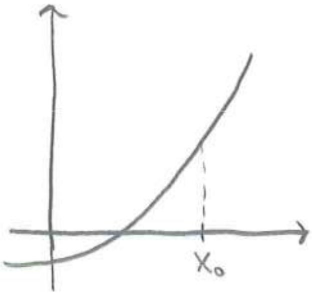
$\therefore f(x)$ ej kontinuerlig i x_0

② 

$\lim\limits_{x \to x_0}$ existerar och $f(x_0)$ är väldefinierad

Men $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

$\therefore f(x)$ är ej kontinuerlig i x_0.

③ 

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$ är kontinuerlig i x_0

Def. $f(x)$, där $x \in D_f$ sägs vara kontinuerlig om $f(x)$ är kontinuerlig i varje $x_0 \in D_f$

Sats Grafen av en kontinuerliga funktioner är sammanhängande.

Elementära funktioner är funktioner som skapas av x^a, a^x, $\sin x$, $\cos x$.

med hjälp av ändligt många följande operationer: $+$, $-$, $\cdot$, $/$ invers, sammansättning

Man kan slarvigt säga att en funktion med ett uttryck är elementär.

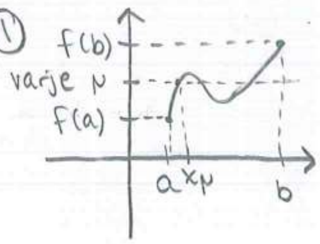
t.ex $\sin\left(e^{\arctan(x^2+1)} / (x^2+1)\right)$ är elementär

Men $f(x)=\begin{cases} x & \text{då } x>0 \\ -1 & \text{då } x\leq 0 \end{cases}$ är inte elementär

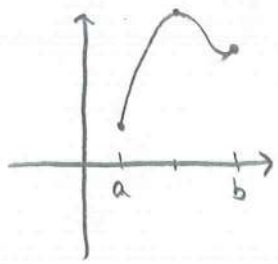
Sats 9,12 Alla elementära funktioner är kontinuerliga i deras definitionsmängd.

Egenskapen har kontinuerlig funktionen i ett slutet intervall $[a,b]$

Sats 9,8-9,9 Om $f(x)$ är kontinuerlig i $[a,b]$ gäller

① 

$y=f(x)$ $f(x)$ antar varje värde mellan $f(a)$ och $f(b)$ i $[a,b]$ (Satsen om mellanliggande värden)

② 

$f(x)$ har största värde och minsta värde i $[a,b]$, och alltså är begränsad i $[a,b]$

9,5 Serier

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{\text{def.}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + \ldots$$ kallas för en serie

Hur summerar man oändligt många tal?

Def $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ om gränsvärdet existerar ändligt, dvs gränsvärdet är ett tal

I så fall sägs serien vara konvergent (mot gränsvärdet). Annars sägs serien vara divergent.

Ex. $$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1^k = \lim_{n\to\infty} (n+1) \quad \therefore \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \text{ divergerar}$$

Ex. $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 1, & \text{då } n \text{ är jämn} \\ 0, & \text{då } n \text{ är udda} \end{cases}$$

som inte existerar

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{ divergerar}$$

Ex. $$\sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} k \text{ divergerar}$$

Ex $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Ex. $$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \infty \quad \text{dvs } \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \text{ är divergent}$$

Allmänt gäller

Sats $$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{då } -1 < x < 1 \text{, dvs } |x| < 1 \\ \text{divergent annars } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Ex $$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{2}{5}\right)^5 + \ldots = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ldots\right.$$

$$\underset{\text{ty } \left|\frac{2}{5}\right| < 1}{=} \left(\frac{2}{5}\right)^3 \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{75}$$