

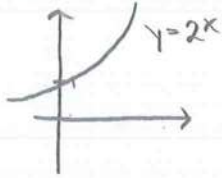
Kap 9 Gränsvärde

9,1  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$   $\leftarrow$  tal,  $\infty$ ,  $-\infty$

eller  $f(x) \rightarrow A$  då  $x \rightarrow \infty$

om  $f(x)$  närmar sig  $A$  då  $x$  närmar sig  $\infty$

Ex.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$



Ex.  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2^x} = 0$

dominerande term

Ex.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{4x^3 - x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(1 + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3})}{x^3(4 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}$

dominerande term

dominerande term = som går mot  $\infty$  snabbast.

$= \frac{1}{4}$

alla dessa går mot 0

Ex.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} + x) = \infty + \infty = \infty$

Ex.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x) = \infty - \infty$  ej definierat

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x})} + x} = \frac{-x}{x(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1)} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x})} + x} = \frac{-x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x} = \frac{-x}{x(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1)} = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$

OBS! Följande uttryck är obestämda  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $\frac{0}{0}$

Sats  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{begränsad funktion}}{\text{funktion}} = \frac{\text{begr.}}{\infty} = 0$

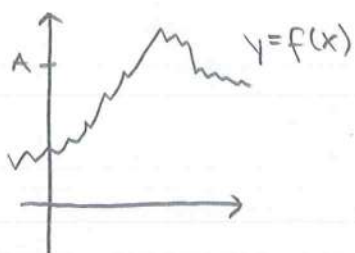
$|a+b| \neq |a| + |b|$   
 $|ab| = |a| \cdot |b|$

Ex.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{begr.}}{=} 0$  ty,  $|\frac{\sin x}{x}| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow \infty$

## Matematiska definitionen av gränsvärde

Def. 9,1 Vi skriver  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  för varje tal  $\varepsilon > 0$  finns ett tal  $w_\varepsilon > 0$  så att

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ för alla } x \in D_f \text{ med } x > w_\varepsilon$$



dvs. skillnaden  $f(x) - A$  är hur liten som helst om  $x$  är tillräckligt stort.

Ex. Visa att  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1$  Beviset står på sidor 164-165 i boken

Sats 9,1 Följande gäller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( f(x) \cdot g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$\neq \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} ?$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} \right) \left( \frac{1}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \underset{\downarrow 1}{1} - \underset{\downarrow 0}{\frac{2}{x}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x^2}} \right) \left( \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x}} + \underset{\downarrow 1}{1} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

Vi vet att för ett tal  $c > 0$  gäller

①  $\ln x \rightarrow \infty$  då  $x \rightarrow \infty$  långsammast

②  $x^c \rightarrow \infty$  då  $x \rightarrow \infty$

③  $e^x \rightarrow \infty$  då  $x \rightarrow \infty$  snabbast

sats 9,3  $\ln x \ll x^c \ll e^x$  då  $x \rightarrow \infty$

$$\text{dvs. } \frac{\ln x}{x^c} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \quad \frac{x^c}{e^x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty$$

$$\frac{\ln x}{e^x} \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow \infty$$

Obs. I satsen ovan kan basen  $e$  bytas av ett tal  $a > 1$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{2 \ln x}{e^x}\right) = \infty$$

$$\text{Ex. 9,11 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \ln x}{3e^x + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{\ln x}{e^x}\right)}{e^x \left(3 + \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{1}{3}$$

OBS!  $0 \cdot \infty$  är obestämmd.

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \cdot \ln x \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln t}{t^2} = 0$$

$x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow x > 0$  och  $x > 0$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x^{1/3}}\right)^3 = 0^3 = 0$$

Sats 9,3 (talet e)

$$\text{Sats } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$x \rightarrow \infty$  eller  $x \rightarrow -\infty$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \stackrel{t = \frac{x}{2}}{=} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

Föreläsning 2015-09-30

9,2 och 9,4

Standardgränsvärde

①  $\ln x \ll x^c \ll e^x$  då  $x \rightarrow \infty$  ( $c > 0$ )

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - 2e^x + x^{10} + 2^x}{e^x + \ln x - x - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \left(\frac{\sin x}{e^x} - 2 + \frac{x^{10}}{e^x} + \left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{e^x \left(1 + \frac{\ln x}{e^x} - \frac{x}{e^x} + \left(\frac{2}{e}\right)^x\right)} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{obestämmd}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\ln x)(\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

②  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \stackrel{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{-x}{3}}\right]^{-x} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{ty } \forall x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1$$

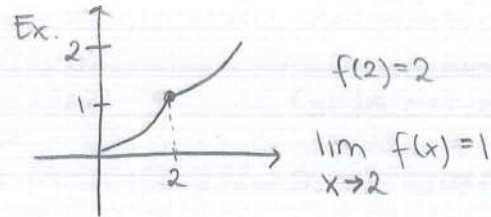
$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x} \cdot 3x}{\frac{\ln(1+2x)}{2x} \cdot 2x} = \frac{3}{2}$$

Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ eller } f(x) \rightarrow A \text{ då } x \rightarrow a$$

↑ tal om  $f(x)$  närmar sig  $A$  då  $x$  närmar sig  $a$   $x \neq a$

OBS!  $\textcircled{a}$   $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  betyder  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$



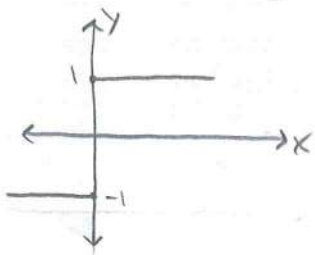
$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{1} = 0$$

$\textcircled{b}$  Vi skriver  $\lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ \text{tal}}} f(x)$  betyder  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$  och  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ a > x}} f(x)$

Ex. För  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } x \geq 0 \\ -1 & \text{då } x < 0 \end{cases}$

gäller  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

och  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$



Klart att vi har

Sats  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$

Ex.  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{då } x < 1 \\ 3x & \text{då } x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x) = 3$

och  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{som medför}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

### Sats 9.5 Instängningssatsen

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ för alla } x \text{ nära } a$$

$$\downarrow \text{A då } x \rightarrow a$$

$$\downarrow \text{A då } x \rightarrow a$$

$$h(x) \rightarrow A \text{ då } x \rightarrow a$$

### Standardgränsvärde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} \quad \cos 0 = 1$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{= 1}$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) \begin{matrix} \text{"}\infty \cdot 0\text{"} \\ \text{obestämd!} \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{1}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \ln \frac{1}{t} \right) \begin{matrix} \text{"}0 \cdot (-\infty)\text{"} \\ \text{obestämd} \end{matrix} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln t}{t^{1/2}} = 0$$

Allmänt gäller

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \cdot \ln x = 0 \quad \text{där } \alpha > 0$$

Föreläsning 2015-10-01

### 9.3 Kontinuerliga funktioner

Def.  $f(x)$  sägs vara kontinuerlig i  $x_0$  om  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



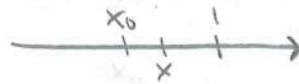
$$\text{Ex. Visa att } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{då } x \neq 1 \\ -1 & \text{då } x = 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig i alla punkter  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$-\infty < x_0 < \infty$$

Beweis: För  $x_0 \neq 1$  gäller

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{ty \ x_0 \neq 1}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$$



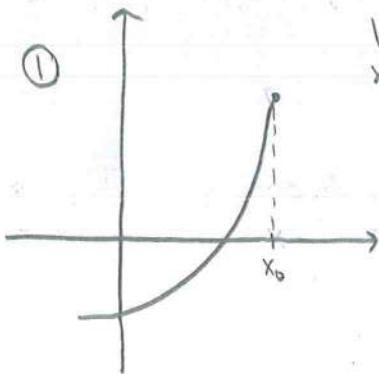
$$= \frac{x_0^2-3x_0+2}{x_0-1} = f(x_0) \Rightarrow f(x) \text{ är kontinuerlig i } x_0$$

$$\text{För } x_0 = 1 \text{ gäller } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x-2 = 1-2 = -1 = f(1) \quad \therefore f(x) \text{ är kontinuerlig i } x_0 = 1$$

Ex.

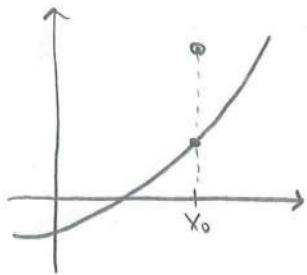
①



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existerar inte

$\therefore f(x)$  ej kontinuerlig i  $x_0$

②

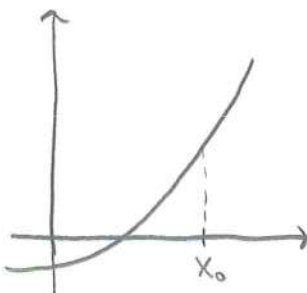


$\lim_{x \rightarrow x_0}$  existerar och  $f(x_0)$  är väldefinierad

Men  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

$\therefore f(x)$  är ej kontinuerlig i  $x_0$ .

③



$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow f(x)$  är kontinuerlig i  $x_0$

Def.  $f(x)$ , där  $x \in D_f$  sägs vara kontinuerlig om  $f(x)$  är kontinuerlig i varje  $x_0 \in D_f$

Sats Grafen av en kontinuerliga funktioner är sammanhängande.

Elementära funktioner är funktioner som skapas av  $x^a$ ,  $a^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

med hjälp av ändligt många följande operationer:  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $/$ ,  
invers, sammansättning

Man kan slarvigt säga att en funktion med ett uttryck är elementär.

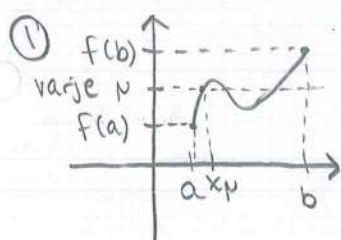
t.ex  $\sin\left(\frac{e^{\arctan(x^2+1)}}{(x^2+1)}\right)$  är elementär

Men  $f(x) = \begin{cases} x & \text{då } x > 0 \\ -1 & \text{då } x \leq 0 \end{cases}$  är inte elementär

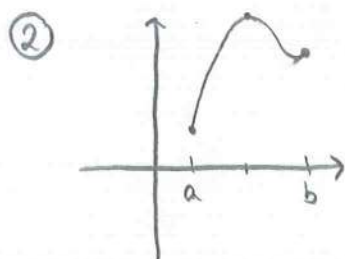
Sats 9,12 Alla elementära funktioner är kontinuerliga i deras definitionsmängd.

Egenskapen har kontinuerlig funktionen i ett slutet intervall  $[a, b]$

Sats 9,8-9,9 Om  $f(x)$  är kontinuerlig i  $[a, b]$  gäller



$y = f(x)$   $f(x)$  antar varje värde mellan  $f(a)$  och  $f(b)$   
i  $[a, b]$  (Satsen om mellanliggande värden)



$f(x)$  har största värde och minsta värde i  $[a, b]$ , och  
alltså är begränsad i  $[a, b]$

9,5 Serier

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \stackrel{\text{def.}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + \dots \quad \text{kallas för en serie}$$

Hur summerar man oändligt många tal?

Def  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$  om gränsvärdet existerar ändligt,  
dvs gränsvärdet är ett tal

I så fall sägs serien vara konvergent (mot gränsvärdet). Annars sägs serien  
vara divergent.

$$\text{Ex. } \sum_{k=0}^{\infty} 1^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 1^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \quad \therefore \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \text{ divergerar}$$

$$\text{Ex. } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1, & \text{d\u00e5 } n \text{ \u00e4r j\u00e4mn} \\ 0, & \text{d\u00e5 } n \text{ \u00e4r udda} \end{cases}$$

som inte existerar

$$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{ divergerar}$$

$$\text{Ex. } \sum_{k=1}^{\infty} k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} k \text{ divergerar}$$

$$\text{Ex. } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Ex. } \sum_{k=0}^{\infty} 3^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \infty \quad \text{dvs } \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \text{ \u00e4r divergent}$$

Allm\u00e4nt g\u00e4ller

$$\text{Sats } \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{d\u00e5 } -1 < x < 1, \text{ dvs } |x| < 1 \\ \text{divergent} & \text{annars } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ex. } \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{2}{5}\right)^5 + \dots = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots\right)$$

$$\text{ty } \left|\frac{2}{5}\right| < 1 \quad \left(\frac{2}{5}\right)^3 \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{8}{125} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{75}$$