Division

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Man behöver ej skriva ut alla steg såvida det inte står i uppgiften.

Kvadratrötter och potenser

$\sqrt{a}$ är ett tal som uppfyller

① $\sqrt{a} \geq 0$ och ② $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$ dvs. $(\sqrt{a})^2 = a$ där talet $a \geq 0$

Ex. $\sqrt{16} = 4$ $\quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ $\quad \sqrt{-7}$ ej def.

allmänt gäller

$\sqrt{a^2} = |a|$ dvs. $\begin{cases} a & \text{då } a \geq 0 \\ -a & \text{då } a < 0 \end{cases}$

Föreläsning ② Potenser fortsättning

En potens är ett tal, som ser ut

a^b ← exponent
↑ bas

Potenslagar:

① $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ② $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ③ $(a^x)^y = a^{xy}$

④ $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Avsnitt 2,3

Ex. $6x^2 - 5x + 1$ är ett polynom med variabeln x.

$p(x)$ def. $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ där $a_n \neq 0$ sägs ha grad n. och vi skriver $\deg p(x) = n$

Ex. $\deg(x^3 - 1) = 3$ $\quad \deg(-1) = 0$

Alla icke-noll konstant har graden 0, men nollpolynom saknar grad.

ⓐ $(x^2 + x - 1) + (-x + 3) = x^2 + 2$

ⓑ $(x+1)(2x^2 - 1) = 2x^3 + 2x^2 - x - 1$

Faktorisering

Ex. $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

Ex. $x^2+4x-5 \Rightarrow$ kvadratkomplettering

$$x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2-2^2-5=(x+2)^2-3^2$$
$$=((x+2)+3)((x+2)-3)=(x+5)(x-1)$$

Rationell funktion

Ex. $\frac{x^2-1}{2x-2}$ är en rationell funktion som kan förenklas som

$$\frac{x^2-1}{2x-2} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2} \quad \text{dvs} \quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

Polynomdivision

Ex. $p(x)=3x^3+2x^2-5x+1$ delas med $g(x)=x^2+3$

$$\frac{p(x)}{g(x)} = \text{kvoten} + \frac{\text{resten}}{g(x)}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{3x+2} \\
\hline
3x^3+2x^2-5x+1 & x^2+3 \\
\cline{2-2}
-(3x^3 \quad\quad +9x) & \\
\quad 2x^2+14x+1 & \\
\quad -(2x^2 \quad\quad +6) & \\
\quad\quad -14x-5 & \\
\end{array}
$$

$\uparrow$ resten

Allmänt Sats 2,1 Polynomdivision

Om $f(x)$ och $g(x) \neq 0$ (nollpolynomet) är ett polynom så finns det polynom $q(x)$ och $r(x)$ sådana att

$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ där $\deg r(x) < \deg g(x)$ eller $r(x)=0 \leftarrow$ nollpolynomet

Sats 2,2 Faktorsatsen.

Låt $f(x)$ vara ett polynom. Då gäller $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow x-\alpha$ är en faktor till $f(x)$

dvs. $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ för något polynom $g(x)$ som ger $f(\alpha)=\underbrace{(\alpha-\alpha)}_{0}g(\alpha)=0$

$\Rightarrow$ antag att $f(\alpha)=0$. Division av $f(x)$ med $x-\alpha$ ger $f(x)=g(x)(x-\alpha)+r(x)$

$g(x)$ och $r(x)$, där $\deg r(x) < \deg (x-\alpha)=1$ eller $r(x)=0$

Dvs. $r(x)=C$ (en konstant)

$f(x)=g(x)(x-\alpha)+C$

Insättning av $x=\alpha$ ger $f(\alpha)=q(\alpha)(\alpha-\alpha)+C \quad C=0$

$$f(x)=g(x)(x-\alpha)$$