Föreläsning 2

20 januari

Ex. (2015-01-07, 1, jfr 1.17)

Hitta, om möjligt, en holomorf funktion f vars realdel u ges av $u(x,y) = xy^3 - x^3y$

Kan vi finna v så att u & v uppfyller CR-ekvationer?

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ v'_x = -u'_y \end{cases}$$

$v'_x = -u'_y = -3xy^2 + x^3 \quad (*)$

$v'_y = u'_x = y^3 - 3x^2y \quad (**)$

Integrerar $(*)$ med avseende på x:

$v(x,y) = -\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{4} + \varphi(y) \quad (***)$

reell!

$y^3 - 3x^2y \overset{(**)}{=} v'_y \overset{(***)}{=} -3x^2y + \varphi'(y) \Leftrightarrow \varphi'(y) = y^3 \Leftrightarrow \varphi(y) = \frac{1}{4}y^4 + C$

$f = u + iv = xy^3 - x^3y + i\left(-\frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + C\right)$

är holomorf med u som realdel.

Vi vill skriva f som en funktion av z.

Sätt $y=0$ och ersätter x med z

$\Rightarrow f(z) = i\left(\frac{z^4}{4} + C\right)$

reell

Fungerar för holomorfa funktioner pga. en entydighetssats.

Definition

Anta att u är C^2 ← partiellt deriverbar 2 ggr med kontinuerliga andraderivator

Om $\underbrace{u''_{xx} + u''_{yy}}_{\Delta u = \nabla^2 u \text{ [laplace]}} = 0$ så är u en harmonisk

Sats (1.19)

Om $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ är holomorf så är u & v harmoniska

Ex. u ovan

$u'_x = y^3 - 3x^2y \quad u''_{xx} = -6xy$

$u'_y = 3xy^2 - x^3 \quad u''_{yy} = 6xy$

så $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

Omvändningen av satsen gäller inte. Utan vi kollar harmoniteten för att se om det är "lönt" att leta efter den horomorfa funktionen.

Bevis (under antagande att f är C^2)

C-R: $u''_{xx} = (u'_x)'_x \underset{CR}{=} (v'_y)'_x \underset{C^2}{=} (v'_x)'_y \underset{CR}{=} (-u'_y)'_y = -u''_{yy}$

således $u''_{xx} = -u''_{yy} \iff u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

Beviset för att v är harmoniskt sker på samma sätt

Ex. (2015-03-21, 2b, jfr 1.20)

Finns holomorf $f = u + iv$ så att $u = x^3 - y^3$?

Börjar med att göra laplace för att se om det kan finnas en horomorf funktion.

$u'_x = 3x^2 \quad u''_{xx} = 6x$

$u'_y = -3y^2 \quad u''_{yy} = -6y$

så $\Delta u = 6x - 6y \neq 0$ så NEJ

Satsen ovan: f horomorf $\Rightarrow$ u harmonisk

$\iff$ u ej harmonisk $\Rightarrow$ f ej horomorf

Ex. 1.22

Antag att $f = u + iv$ är holomorf och att v är konstant.
Då är f konstant. Bågvis sammanhängande

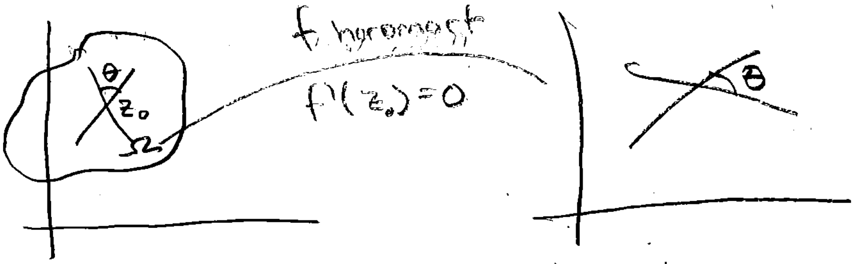
En analytisk funktion $f = u$ är alltid konstant.

CR: $\left.\begin{array}{l} u_x' = v_y' = 0 \\ u_y' = -v_x' = 0 \end{array}\right\}$ grad $u(x,y) = \bar{0}$, så u = konstant

$\boxed{\text{Kolla ex. 1.23 själva}}$

Avsnitt 1.3

Komplexa funktioner som avbildningar. Brukar ses som kurs i ut



Vinkelbevarande:

Kapitel 2 - Elementära funktioner

forum.maths.lth.se

Polynom

Funktioner på formeln $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

$a_n \neq 0$, graden för $p = n$

Bekanta resultat

* Polynomdivision (Sats 2.1)
* Faktorsatsen: Om $p(a) = 0$ så är $z-a$ en faktor i polynomet, dvs $p(z) = (z-a)q(z)$ (sats 2.2)
* Algebrans fundamentalsats (Sats 2.3) Varje icke konstant polynom har minst ett komplext nollställe.

$$p(z) = A(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$$

Ex (2.4) Funktionen $f(z) = z^n$ är holomorf på $\mathbb{C}$ (sådana funktioner kallas hela)

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{z^n - a^n}{z-a} = \left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-3}z^2 + a^{n-2}z + a^{n-1}\right)$$

$$\to n a^{n-1} \text{ då } z \to a$$

så $f'(a) = na^{n-1}$

Följd: Polynomet $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ är holomorft på $\mathbb{C}$, och $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1}$

Allt vi säger om holomorfa funktioner gäller för polynom

Ex. (2.4)

Lös $z^2 = 3+4i$

$z = x + iy$ $\qquad$ $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$ $\qquad$ $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3): $2x^2 = 8$ så $x = \pm 2$

$x = 2$ ger (2): $y = 1$

$x = -2$ ger (2): $y = -1$

Lösningar: $z_1 = 2 + i$

$z_2 = -2 - i$

$\boxed{\text{Lös ex 2.6 själva}}$

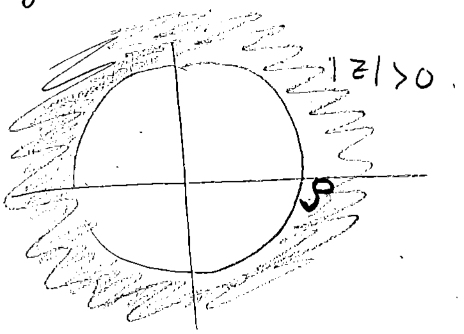
Sats (2.7)

Låt $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$

Då finns ett tal $\rho > 0$ så att

$$|z| > \rho \Rightarrow \frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z|^n$$

Det säger



satsen säger:
ρ som gör att endast $a_n z^n$ spelar roll

Ex. $\left| \frac{1}{1+z^4} \right| \leq \frac{1}{\frac{1}{2}|z|^4}$ om z är tillräckligt stort

(känner igen från endim egenskapen

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x-x^2}{3+2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}(\underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0} - 1)}{\cancel{x^2}(\underbrace{\tfrac{3}{x^2}}_{\to 0} + 2)} = -\frac{1}{2}$$
)

Desto längre från, desto mer endast den dominanta termen

Bevisidé

$$\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|a_0 z^{-n} + a_1 z^{-n+1} + \dots + a_n\right| \to |a_n| \text{ då } |z| \to +\infty$$

Om $|z|$ är stort ($|z| > \rho$ för något ρ) så är

$$\frac{1}{2}|a_n| \leq \left|\frac{p(z)}{z^n}\right| \leq 2|a_n|$$

multiplicera med $|z|^n = |z^n|$

Rationella funktioner

$\dfrac{p(z)}{q(z)}$ är inte definerad i $q(z)$:s nollställen.

$$R(z) = \frac{z(z-1)^2}{(z+2)(z+3)^3}$$

enkelt nollställe i $z=0$

dubbelt nollställe i $z=1$

enkel pol i $z=-2$

trippel pol i $z=-3$

Rationella funktioner uppskattas p.s.s som polynom (sats 2.9)

$$\frac{1}{4} \leq \frac{|z(z+1)^2|}{|(z+2)(z+3)^3|} \leq 4\frac{1}{|z|}$$