Föreläsning 16

23 februari

Senast 9/3 godkänd på båda inlämningsuppgifterna.

Sats 8.6

Om f är analytisk på Ω så är f holomorf på Ω.

Sats 8.7

Konvergenta potensserie kan integreras och deriveras termvis, utan att ändra konvergensradien. Specifikt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-c)^k, \quad |z-c| < R \Rightarrow f'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot a_k (z-c)^{k-1}, \quad |z-c|<R$$

$$\Rightarrow \int f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} (z-c)^{k+1} + C$$

Bevisidé tänk rottest

Borde vara att $\lim_{k\to+\infty} |a_k(z-c)^k|^{1/k}$ är detsamma som $\lim_{k\to+\infty} |k a_k (z-c)^{k-1}|^{1/k}$

$\frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \to 1$

$k^{1/k} \to 1$

Ex. 8.8

Vi vet $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k=0} z^k$ om $|z| < 1$

Potensserie

Derivera termvis:

$$D\left(\frac{1}{1-z}\right) = D\left((1-z)^{-1}\right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Så $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot z^{k-1}$ multiplicera med z: $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k z^k, \quad |z| < 1$

Till exempel: $z = \frac{1}{2}$ ger $\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Ex 8.9 $\dfrac{1}{1-z^2} = \dfrac{1}{1-(-z^2)} = 1 + (-z)^2 + (-z^2)^2 + (-z^2)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k}$

$$, |z| < \sqrt{1} = 1$$

$$\arctan(z) - C = \int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1}$$

C bestäms genom att sätta in något värde på z där arctan är känd.

t.ex. $\arctan 0 = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 - C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot 0^{2k+1}}{2k+1} = 0 \iff \underline{C = 0}$$

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{(maclaurinutvecklingen)}$$

$$, |z| < 1$$

"Utvecklingen är endast sann för disken med $|z|<1$"

Gäller likheten för $z=1$?

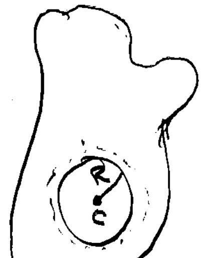
Är $\dfrac{\pi}{4} = \arctan 1 = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}}$?

Konvergent enligt Leibniz kriterium

Abels sats säger att $\pi = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

Sats 8.10

Om f är holomorf på ett område som innesluter disken $|z-c|<R$ så kan f skrivas som en potensserie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-c)^k$ med konvergensradie minst R



Dessutom är $a_k = \frac{1}{i2\pi}\int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\,dz$ för godtyckligt $0<r<R$

Observera: Kombinerar vi detta med Cauchys integralformel så får vi:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}. \quad \text{Så } f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k$$

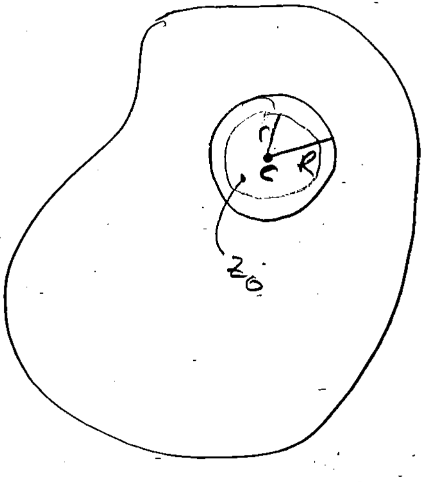
Taylors formel

Ex. $f(z)=e^z$. f är holomorf på hela $\mathbb{C}$, dvs $R \to \infty$.

$f'(z) = \frac{d}{dz} e^z = e^z$

$f(0)=1$, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$ osv. $\Rightarrow f^{(n)}(0)=1$

Vi får att (med $c=0$) $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k$



$$f \text{ holomorf} \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-c)^k$$

$$a_k = \frac{1}{i2\pi} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\, dz$$

Låt z_0 vara i $|z-c<r$

då är (Cauchys integralform)

$$f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz$$

$$\frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{\underbrace{(z-c)}_{r} - \underbrace{(z_0-c)}_{<r}} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_0-c}{z-c}} = \frac{1}{z-c} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z_0-c}{z-c}\right)^k$$

Vi får $f(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{z-c} \sum_{k=0} \left(\frac{z_0-c}{z-c}\right)^k dz =$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{i2\pi} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^k}\, dz\right)}_{a_k} (z_0-c)^k = \sum_{k=0} a_k (z_0-c)^k$$

Sats 8.13

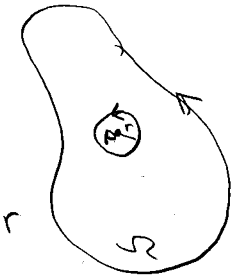
Om f är holomorf på Ω så är f' också det.

idé: f holomorf => f analytisk => f' analytisk (samma konvergensdiskar)

=> f' holomof VSV

Följd: Varje holomorf funktion är C^∞, dvs deriverbar godtyckligt många gånger

8.14 $$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{i2\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}\,dz$$



$\gamma = \partial\Omega$

Bevis

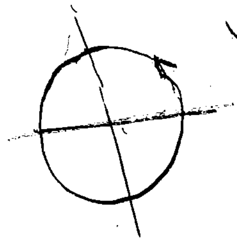
1) Deformera γ till en cirkel $|z-p|=r$

2) Sats 8.10 ger nu $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-p)^k$ med
$$a_k = \frac{1}{i2\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}}\,dz$$

3) Derivera identiteten n gånger.

Ex. 8.15

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{4z}}{z^3}\,dz. \quad \text{Låt } f(z)=e^{4z}$$



γ enhetscirkeln

Mönstermatchning med formeln i 8.14

$p=0$, $n=2$ fås $$\int_{|z|=1}\frac{e^{4z}}{z^3}\,dz = \int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^3}\,dz = \frac{i2\pi}{2!}f''(0) =$$

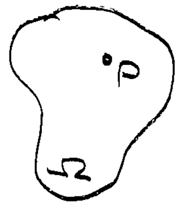
Cauchys integralformel

$$= i\pi 16$$

Sats 8.16

Antag att f är holomorf på Ω. Antag vidare att
$f(p)=0$, $f'(p)=0$, $f''(p)=0$, ...

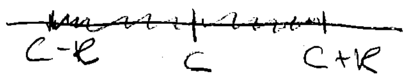
Då måste $f(z)=0$ för alla z i Ω.

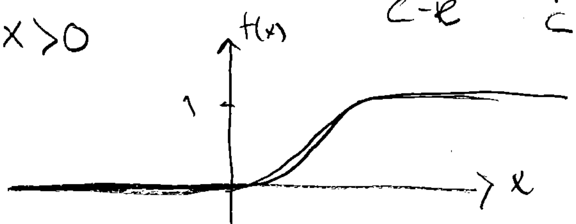


Ex 8.17

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sägs vara reellanalytisk om $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$ för
$c-R<x<c+R$

Låt nu $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0\end{cases}$





f ej reellanalytisk!

Påstående: f är C^∞ på hela $\mathbb{R}$. Klart för $x\neq 0$

För $x=0$ måste man gå tillbaka till def av derivatan. Kan visa att alla derivator
i noll existerar och är lika med