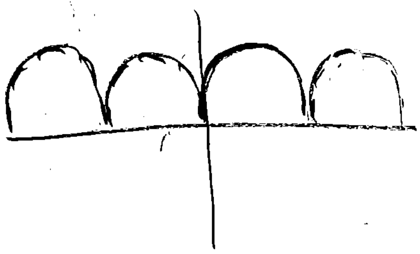
Föreläsning 15

19 februari

$$\left.\begin{aligned} &u'_t = u''_{xx} \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0<t \\ &u(x,0) = x(1-x), \quad 0<x<1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} D_k e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x)$$

$$t=0: \quad x(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} D_k \sin(k\pi x)$$



Fortsätter vi $x(1-x)$ 1-periodiskt så blir funktionen jämn!

Det innebär att om vi utvecklar $x(1-x)$ i trig F-serie

$$c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\Omega x) + b_k \sin(k\Omega x)$$

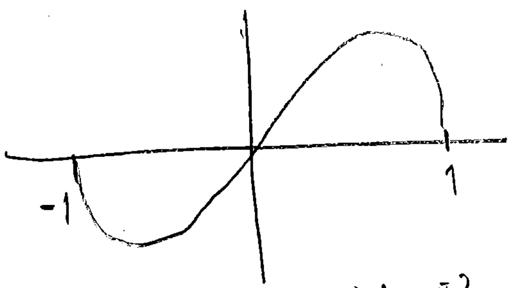
så kommer $b_k = 0$!

$$\Rightarrow x(1-x) = c_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\Omega x)$$

Detta ville vi ju inte ha.

Hur löser vi detta?

Utvidga istället $x(1-x)$ först till $(-1,1)$ som en <u>udda</u> funktion



Utvidga sedan 2-periodiskt $f(x)$ och beräkna trig. Fourierserien.

Detta <u>skall</u> på samma sätt ge en serie $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\Omega x)$

perioden = 2

I detta fallet är $T = 2$, $\Omega = \pi$

$$(D_k = b_k) \qquad b_k = \underbrace{\frac{2}{T}}_{=1} \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{udda}} \underbrace{\sin(k\pi x)}_{\text{udda}}}_{\text{jämn}} dx = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(k\pi x)\,dx$$

$$= 2\left[\cancel{x(1-x)\left(-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right)}\right]_0^1 + 2\int_0^1 (1-2x)\cdot\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx = \quad = \frac{4(1-(-1)^k)}{(k\pi)^3}$$

$$= 2\left[\cancel{(1-2x)\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}}\right] + 2\int_0^1 2\frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\,dx = 4\left[\frac{-\cos(k\pi x)}{(k\pi)^3}\right]_0^1 = \frac{4}{(k\pi)^3}(1-\cos(k\pi)$$

Så $u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1-(-1)^k)}{(\pi k)^3} \cdot e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x)$

$$1-(-1)^k = \begin{cases} 0, & k \text{ jämnt} \\ 2, & k \text{ udda} \end{cases}$$

Vi summerar endast över udda k, dvs $k=2n-1$
$n=1,2,3$

Så $u(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-((2n-1)\pi)^2 t} \cdot \sin((2n-1)\pi x)$

Kapitel 8 - Potensserie

Definition 8.1

Med en potensserie menar vi en serie på formen

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-c)^k = a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \dots$$

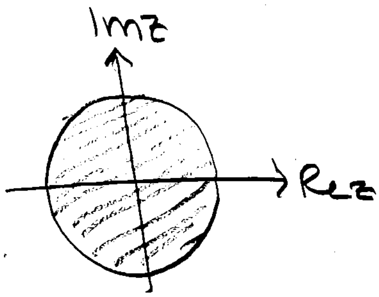
"Generalisering av polynom"

$z \in \mathbb{C}$, $a_k \in \mathbb{C}$

Vi säger att potensserien ovan är centrerad i $c \in \mathbb{C}$

Ex. 8.2

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \quad (c=0,\ a_k = 1 \text{ för alla } k)$$



(Konvergent $\Leftrightarrow$ $|z|<1$)

Icke-exempel

- $\frac{1}{z} + 1 + z = z^{-1} + 1 + z$

  Får ej vara med.

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(z - \frac{1}{k}\right)^k$

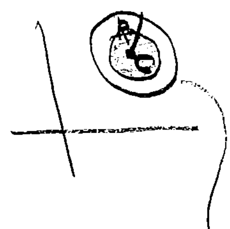
  Beror på k!

- $\sum_{k=1}^{+\infty} (\sqrt{z})^k = \sum_{k=1}^{+\infty} z^{k/2}$ ej heltal!

Sats 8.3

Låt $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-c)^k$ vara en potensserie. Då finns R, $0 \le R \le$

kallad seriens konvergensradie så att:



1) Serien konvergerar absolut om $|z-c|<R$
2) serien divergerar om $|z-c|>R$
3) Serien konvergerar likformigt på varje disk $|z-c|<r$, $r<R$

konvergens cirkel
= cirkelranden

Ex. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergerar för alla $z \in \mathbb{C}$ $(R=+\infty)$

För att visa så kan vi använda rottest eller likvonde.

Ex. $\sum_{k=0}^{+\infty} k! z^k$ konvergerar endast för $z=0$. $(R=0)$

Ex. För den geometriska summan $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ är $R=1$.

Bevisidé

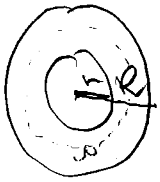
Vi gör det i fallet då $L = \lim_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k}$ existerar

$$\lim_{k \to +\infty} |a_k(z-c)^k|^{1/k} = \lim_{k \to +\infty} |a_k|^{1/k} \cdot |z-c| = L|z-c|$$

Om $L|z-c|<1$ har vi absolut konvergens. (rotkriteriet)
Om $L|z-c|>1$ har vi divergens. (rotkriteriet)

med $R=\frac{1}{L}$ följer 1) och 2)

3)



Använd Weierstrass M-test och "jämför" med geometrisk serie.

Ex. 8.4

Bestäm konvergensdiskarna för

a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k (z-1)^k}{k^2}$ b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(k+1)3^k}$

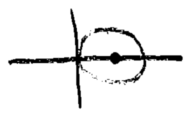
a) Centrum för konvergensdisken = 1. Vi vill hitta radien.
Vi undersöker serien med rottestet:

$$\left|\frac{2^k (z-1)^k}{k^2}\right|^{1/k} = \frac{2|z-1|}{(k^2)^{1/k}} \to 2|z-1|$$

$$(*)\ (k^2)^{1/k} = e^{\frac{1}{k}\ln(k^2)} = e^{\frac{2\ln k}{k}} \to e^0 = 1 \text{ då } k \to +\infty$$

Absolutkonvergens då:

$|z-1| < \frac{1}{2}$



för $r = \frac{1}{2}$

Vad händer då $|z-1| = \frac{1}{2}$?

$$\left|\frac{2^k (z-1)^k}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}$$ Vi vet att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent (p-serie, $p=2$)

Så serien är absolutkonvergent på cirkeln $|z-1| = \frac{1}{2}$

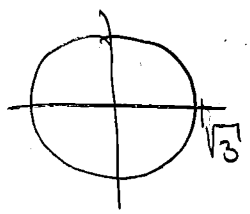
b) Kvottestet: ($\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$ $\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| \to L$, $L<1 \Rightarrow$ absolut konv., $L>1 \Rightarrow$ divergent)

Med $c_k = \frac{z^{2k+1}}{(k+1)3^k}$ får vi:

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \left|\frac{\frac{z^{2k+3}}{(k+2)3^{k+1}}}{\frac{z^{2k+1}}{(k+1)3^k}}\right| = |z|^2 \left|\frac{k+1}{k+2}\right| \cdot \frac{1}{3} \to \frac{|z|^2}{3} \text{ då } k \to +\infty$$

Kvottestet ger absolutkonvergens om $|z| < \sqrt{3}$. Divergens då $|z| > \sqrt{3}$

Radien för konvergensskivan blir $\sqrt{3}$

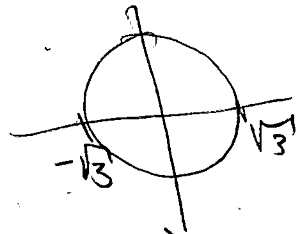


$\Longrightarrow$

Vad händer då $|z| = \sqrt{3}$?

$z = \sqrt{3}$ ger $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{k+1}$ divergent, d: harmonisk(?) (jmf. med $\sum_{k=1} \frac{1}{k}$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{3}}{n}$ är divergent!



$z = -\sqrt{3}$ ger $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-\sqrt{3}}{k+1}$ som är divergent!

$z = \sqrt{3} \cdot e^{it}$, $0 \le t < 2\pi$ ($t=0$, $t=\pi$ har behandlats)

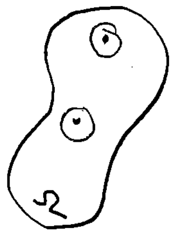
$$\frac{z^{2k+1}}{(k+1)\cdot 3^k} \quad \frac{\sqrt{3}\, e^{(2k+1)it}}{k+1} = \frac{\sqrt{3}}{k+1}\left(\cos(2k+1)t + i\sin(2k+1)t\right)$$

Liknar Fourierserier. "Problemet vi har är att vi inte vet vilken funktionen är" Här kör vi fast i denna kursen.

- Vägen ut är Dirichlets test (ingår ej i kursen)

$\Rightarrow$ konvergens då $t \neq 0$ och $t \neq \pi$.

Definition 8.5



En funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sägs vara analytisk på Ω om det till varje punkt $c \in \Omega$ finns en positiv konvergensradie R sådan att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-c)^k \quad \text{för alla } |z-c| < R$$

Sats 8.6

Om f är analytisk på Ω så är f holomorf på Ω.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (z-c)^k \xrightarrow{\text{likf.}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-c)^k$$