Föreläsning 14 — 17 februari

Sats (7.13 – 7.14)

Antag $f \in L^1$ och T-periodisk.

1) Om $|f| \leq M$ så är $|c_k(f)| \leq M$

2) Om $f \in C^m$ så finns konstant C så att $|c_k(f)| \leq \frac{C}{k^m}$

Bevis

1) $$|c_k(f)| = \frac{1}{T}\left|\int_P f(t)\cdot e^{-ik\Omega t}\,dt\right| \leq \frac{1}{T}\int_P |f(t)\, e^{-ik\Omega t}|\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_P |f(t)|\,dt \leq \frac{M}{T}\int_P 1\cdot dt = M$$

2) $$c_k(f) = \frac{1}{ik\Omega}c_k(f') = \frac{1}{(ik\Omega)^2}c_k(f'') = \ldots = \frac{1}{(ik\Omega)^m}c_k(f^{(m)})$$

där $f^{(m)}$ kontinuerlig på $[0,T]$, så $|f^{(m)}| \leq M$ för något M.

Så $|c_k(f)| = \frac{1}{|k\Omega|^m}|c_k(f^{(m)})| \leq \frac{C}{k^m}$ (med $C = \frac{M}{\Omega^m}$)

Korollarium (sats 7.15)

Om f är T-periodisk och C^2 så konvergerar Fourierserien för f likformigt mot f.

"I allmänhet är detta oftast inte uppfyllt, tänk på exemplena från igår"

Bevisidé

Vi vet att $|c_k(f)| \leq \frac{C}{k^2}$ så $|c_k(f)\cdot e^{ik\Omega t}| \leq \frac{C}{k^2}$.

Eftersom $\sum \frac{C}{k^2}$ är konvergent så ger Weierstrass M-test att serien $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{ik\Omega t}$ konvergerar likformigt

Återstår att den konvergerar mot f!

Sats 7.16 Antag $f \in L^1$ och T-periodisk och att

1) f är kontinuerlig i t_0

2) f har höger- och vänsterderivata i t_0. (Ej nödvändigt lika)

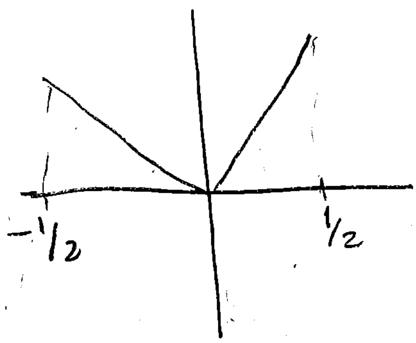
Då är $f(t_0) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\Omega t_0) + b_k \sin(k\Omega t_0))$

Ex. (7.17)

$\Omega T = 2\pi$

För triangelvågen g (med $T=1$) så gäller

$$g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} \cos(2\pi k t)$$



För $t=0$ får vi

$$0 = g(0) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi^2 (2n-1)^2}$$

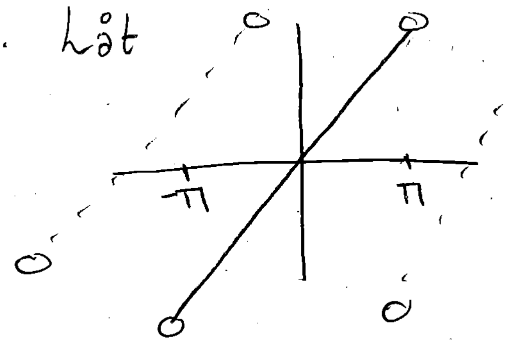
$k = 2n-1$

k = udda

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

Ex. Låt



f: 2π - periodisk
$f(t) = t, \quad -\pi < t < \pi$

Vi beräknar $FS_f^{trig}(t)$:

- f är udda, vilket innebär att alla $a_k = 0 \Rightarrow$ inga cosinustermer.
- $c_0 = 0$, då medelvärdet är 0
- $b_k = \frac{2}{T}\int_P f(t)\sin(k\Omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\sin(kt)\,dt =$

$= \frac{1}{\pi}\left[-t\cdot\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \cancel{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\left(-\frac{\cos(kt)}{k}\right)dt} =$ $\to 0$, då hela perioder

$= -\frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{(-\pi)}{\pi}\cdot\frac{\cos(k(-\pi))}{k} = -\frac{2\cos(k\pi)}{k} = -\frac{2(-1)^k}{k} =$

$= \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$ så $FS_f^{trig}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kt)$

Sats 7.16 säger att Fourierserien konvergerar mot t för alla $-\pi < t < \pi$. Satsen säger inget om diskontinuitetspunkterna $\pm\pi$.

"Frågan är vad som händer i punkterna O". Den kommer i dessa punkter konvergera mot medelvärdet av punkterna. Enligt sats 7.17.

<u>Sats 7.17</u> Antag att f är L^1 och T-periodisk

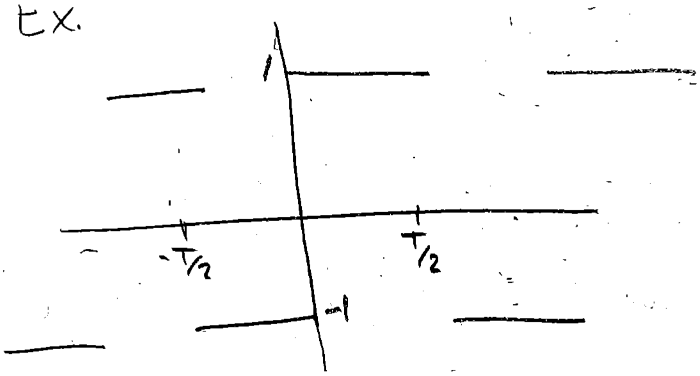
1) Antag att högergränsvärde $f(t_0+0) = \lim_{h\to 0^+} f(t_0+h)$ och vänstergränsvärde $f(t_0-0) = \lim_{h\to 0^-} f(t_0+h)$ existerar. — Kan ej ha $f(t_0)$ då den ej är definerad.

2) Antag att gränsvärdena $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(t_0+h)-f(t_0+0)}{h}$ och $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(t_0+h)-f(t_0-0)}{h}$ existerar $\Rightarrow$

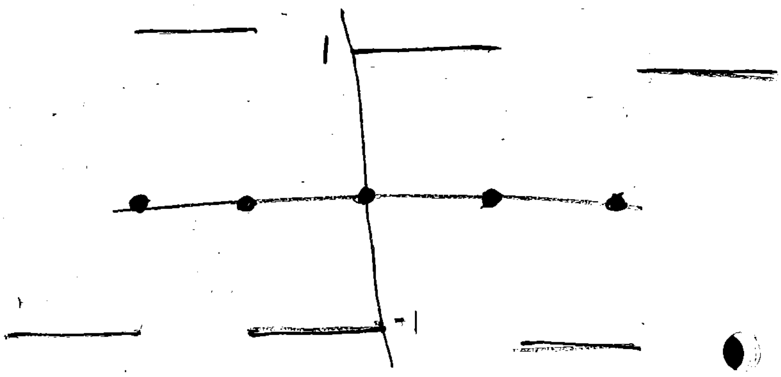
Då gäller det att $c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t)) =$

$= \frac{1}{2}(f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0))$

Ex.



f



$FS_f^{trig}(t)$

$$FS_f^{trig}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{k\pi} \cdot \sin(k\Omega t)$$

$t = 0$ ger $FS_f^{trig}(0) = 0$

$t = \frac{T}{2}$ ger $FS_f^{trig}(\frac{T}{2}) = 0$

$\boxed{\underline{\text{Def}} \quad f \text{ är } L^2 \text{ om } \int_p |f|^2 dt < +\infty}$

<u>Sats 7.20, Parsevals formel</u>

Antag att f och g är L^2, T-periodiska ($f, g \in L^1$)

Då är $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \cdot \overline{c_k(g)} = \frac{1}{T} \int_p f(t) \overline{g(t)}\, dt$

speciellt när $g = f$: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_p |f(t)|^2 dt$

Exempel

Vi visar att summa $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

Triangelvågen g: $c_0 = \frac{T}{4}$ $c_k = \frac{T}{2\pi^2} \cdot \frac{((-1)^k - 1)}{k^2} = \begin{cases} 0 & k \text{ jämn} \\ -\frac{T}{\pi^2 k^2} & k \text{ udda} \end{cases}$

Parsevalsformel: $c_0^2 + \sum_{k \neq 0} c_k^2 = \frac{1}{T} \int_p |g(t)|^2 \, dt =$

$$= \frac{T^2}{16} + \sum_{k \text{ udda}} \left(\frac{-T}{\pi^2 k^2}\right)^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |t|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T} \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{T}\left(\frac{\left(\frac{T}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{T}{2}\right)^3}{3}\right) = \frac{T^2}{12}$$

$$\sum_{k \text{ udda}} \frac{T^2}{\pi^4 k^4} = \frac{T^2}{12} - \frac{T^2}{16} = \frac{4T^2 - 3T^2}{48} = \frac{T^2}{48}$$

$\parallel$

$$2 \sum_{\substack{k \text{ udda} \\ k > 0}} \frac{T^2}{\pi^4 k^4} \underset{k = 2n-1}{=} 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T^2}{\pi^4 (2n-1)^4}$$

Så $2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T^2}{\pi^4 (2k-1)^4} = \frac{T^2}{48} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}}$ VSV

$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \cdot$ rationellt tal

n = heltal

Parseval för trigonometriska Fourierserier

$$\frac{1}{T}\int_P |f(t)|^2\,dt = |c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)$$

Antag att vi har en enkel och sluten kurva i planet som har längd l. Vilken sådan omsluter störst area?

Svaret, och det kan visas med Fourierserier, är att kurvan skall vara en cirkel.