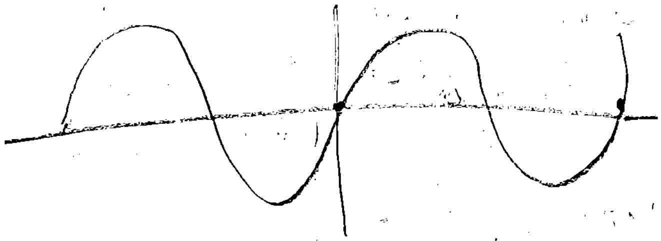
Föreläsning 13 16 Februari

$\boxed{\text{about}(-Z1);\ \text{Heltal} \\ -B1}$

Def. 7.1

En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sägs vara periodisk med period T om $f(t+T) = f(t)$ för alla T



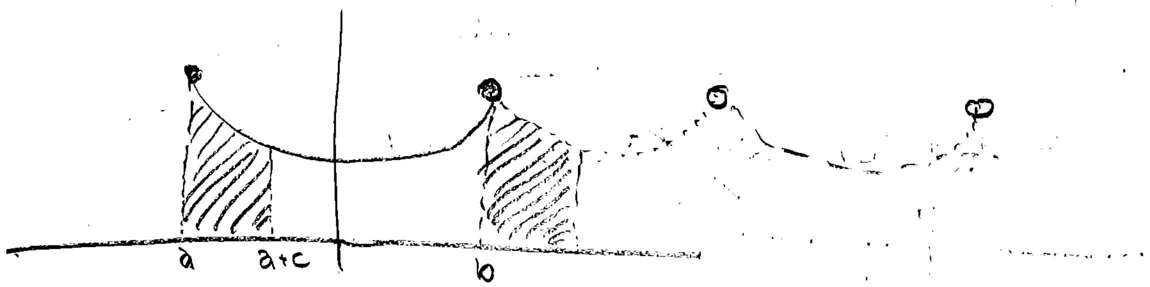
Ex. 7.2

$t \mapsto \sin(\Omega t)$ är periodisk med grundperiod $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

minsta perioden man har.

Motsvarande: $t \mapsto e^{\Omega t}$ $t \mapsto \cos(\Omega t)$ också T-periodiska.

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$



Varje funktion på ett intervall $[a, b)$ kan utvidgas till en $(b-a)$-periodisk funktion. "En ändpunkt måste vara samma. Annars dubbel definierad."

Antag att f har perioden T. Då är $\int_0^T f(t)dt = \int_a^{a+T} f(t)dt$ för alla a.

För att inte behöva gränser skriver man iblond $\int_P f(t)dt$

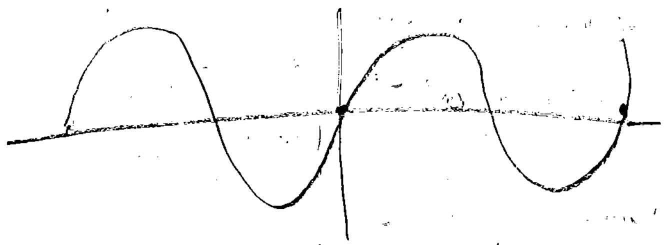
över en period

Föreläsning 13 16 Februari

$\boxed{\text{about}(-Z1);\ \text{Heltal} \\ -B1}$

Def. 7.1

En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ säges vara periodisk med period T om $f(t+T) = f(t)$ för alla T.



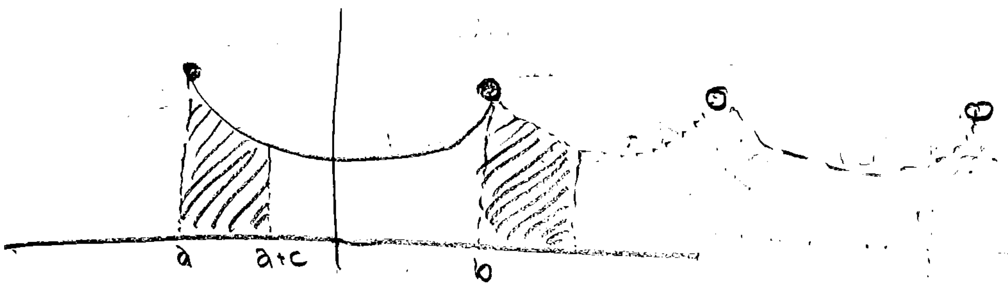
Ex. 7.2

$t \mapsto \sin(\Omega t)$ är periodisk med grundperiod $T = \frac{2\pi}{\Omega}$

→ minsta perioden man har.

Motsvarande: $t \mapsto e^{\Omega t}$, $t \mapsto \cos(\Omega t)$ också T-periodiska.

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$



Varje funktion på ett intervall $[a, b)$ kan utvidgas till en $(b-a)$-periodisk funktion. "En ändpunkt måste vara samma. Annars dubbel definierad."

Antag att f har perioden T. Då är $\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$ för alla a.

För att inte behöva gränser skriver man ibland $\int_P f(t)\,dt$

över en period

Vi ska jobba med serier av typen $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\Omega t}$

Antag att $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\Omega t}$, f är T-periodisk där konvergensen är likformig, "för att vi ska kunna kasta om summering och integration".

Då kan vi få koefficienterna c_k på följande vis:

Då blir $\int_0^T f(t) e^{-in\Omega t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{i(k-n)\Omega t} dt =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^T e^{i(k-n)\Omega t} dt \underset{*}{=} c_n T$$

$$\begin{cases} \underline{k \neq n} \quad \int_0^T e^{i(k-n)\Omega t} dt = \left[\frac{e^{i(k-n)\Omega t}}{i(k-n)\Omega} \right]_0^T = \frac{\overbrace{e^{i(k-n)2\pi}}^{=1 \text{ då } 2\pi i\text{-periodisk}}}{i(k-n)\Omega} - \frac{e^0}{i(k-n)\Omega} = 0 \\ \underline{k = n} \quad \int_0^T 1 \cdot dt = T \end{cases}$$

Så $\boxed{c_k = \frac{1}{T} \int_P f(t) e^{-ik\Omega t} dt}$

<u>Def:</u> Vi säger att f är L^1 på (a,b) om $\int_a^b |f(t)|^1 dt < +\infty$

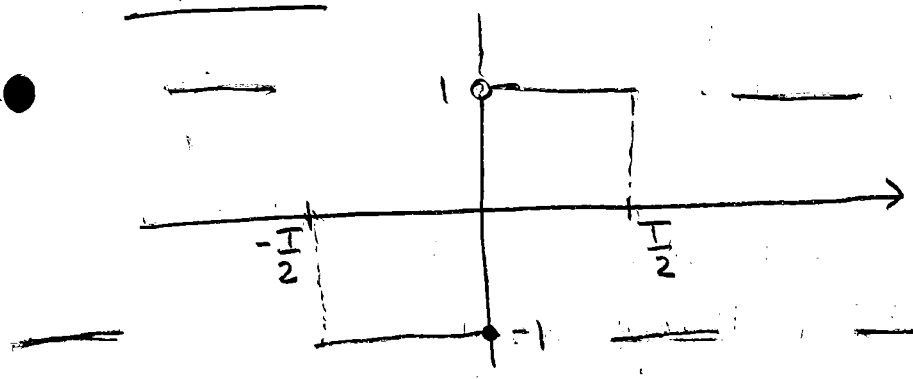
<u>Def</u> Anta att f är L^1 och T-periodisk

Då kallar vi $c_k = \frac{1}{T}\int_P f(t) \cdot e^{-ik\Omega t}\,dt$ för (de exponentiella) Fourierkoefficienterna till f.

Serien $FS_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ik\Omega t}$ kallas för (de exponentiell Fourierserien till f.

$c_0 = \frac{1}{T}\int_P f(t)\,dt$ = medelvärdet av f över intervallet $[0, T]$

<u>Ex 7.8</u>



Fyrkantsvåg

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \end{cases}$$

f är T-periodisk

Beräkna c_k, Fourierkoefficienter

$c_0 = 0$

<u>$k \neq 0$</u>

$$c_k = \frac{1}{T}\int_P f(t) \cdot e^{-ik\Omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-ik\Omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -1\, e^{-ik\Omega t}\,dt + \frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot e^{-ik\Omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-i\Omega kt}}{ik\Omega}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{T}\left[\frac{e^{ik\Omega t}}{ik\Omega}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{1}{ik\Omega} - \frac{1}{ik\Omega} \cdot e^{\frac{ik\Omega T}{2}}\right) - \frac{1}{T}\left(\frac{1}{ik\Omega} \cdot e^{-\frac{ik\Omega T}{2}} - \frac{1}{ik\Omega}\right) =$$

$$= \frac{2}{ik\Omega T} - \frac{2}{ik\Omega t} \cdot (-1)^k = \frac{1}{ik\pi}\left(1 - (-1)^k\right) = \frac{i}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right)$$

Så $FS_f(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right) e^{ik\Omega t} + \underbrace{0}_{c_0 = 0}$

Sats 7.9

f, g är T-periodiska, L^1.

1) • $c_k(f+g) = c_k(f) + c_k(g)$ pga. integraler.
   • $c_k(\alpha f) = \alpha \cdot c_k(f)$

2) $c_k(f') = ik\Omega\, c_k(f)$ (om f deriverbar, $f' \in L^1$)

3) $c_k(f(t-\tau)) = e^{-ik\Omega\tau} c_k(f)$

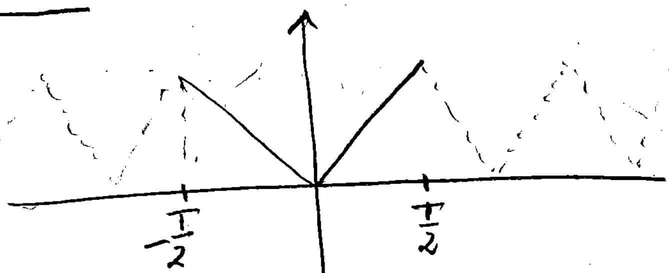
4) $c_k(e^{im\Omega t} f(t)) = c_{k-m}(f)$, $m \in \mathbb{Z}$

Bevis 2)

$$c_k(f') = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t) e^{-ik\Omega t}\,dt \overset{\text{Partiell-integration}}{=} \underbrace{\cancel{\frac{1}{T}\left[f(t)\cdot e^{-ik\Omega t}\right]_0^T}}_{0 \text{ pga periodicitet}} - \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\frac{d}{dt}(e^{-ik\Omega t})\,dt$$

$$= \frac{ik\Omega}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-ik\Omega t}\,dt = ik\Omega\, c_k(f)$$

Ex. 7.10



$$g(t) = \begin{cases} t & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -t & -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases} = |t|, \ -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

g T-periodisk

$g(-t) = g(t) \Rightarrow$ jämn funktion

Bestäm Fourierserien för g!

Man kan bestämma $c_k(g)$ med def. $c_k(g) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{-ik\Omega t}\,dt$

Men observera att $g' = f =$ fyrkantsvågen.

Så $c_k(g) = \frac{1}{ik\Omega} c_k(g')$ (enligt sats 7.9.) $= \frac{1}{ik\Omega} c_k(f) = \frac{1}{ik\Omega}\cdot\frac{i}{k\pi}((-1)^k - 1)$

$= \frac{T((-1)^k - 1)}{2\pi^2 k^2}$; $k \neq 0$

Så $FS_g(t) = \frac{T}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{T((-1)^k - 1)}{2\pi^2 k^2} e^{ik\Omega t}$

$c_0(g) = \frac{T}{4}$ (medelvärdet)

(Läs s. 228)

Trigonometriska Fourierserier

Lös s. 228

Vi tar en symmetrisk partialsumma:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\Omega t} = \sum_{k=-N}^{-1} c_k e^{ik\Omega t} + c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k e^{ik\Omega t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_{-n} e^{-in\Omega t} + c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k e^{ik\Omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{N}(c_{-k} e^{-ik\Omega t} + c_k \cdot e^{ik\Omega t})$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[c_{-k}(\cos(k\Omega t) - i\sin(k\Omega t)) + c_k(\cos(k\Omega t) + i\sin(k\Omega t))\right]$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[\underbrace{(c_{-k}+c_k)}_{a_k}\cos(k\Omega t) + \underbrace{i(c_k - c_{-k})}_{b_k}\sin(k\Omega t)\right] =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cdot \cos(k\Omega t) + b_k \sin(k\Omega t)\right]$$

där $a_k = c_k + c_{-k} = \frac{1}{T}\int_P f(t)(e^{-ik\Omega t} + e^{ik\Omega t})\,dt =$

$$= \frac{2}{T}\int_P f(t)\cdot\cos(k\Omega t)\,dt$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{1}{T}\int_P f(t)\cdot i(e^{-ik\Omega t} - e^{ik\Omega t})\,dt =$$

$$= \frac{2}{T}\int_P f(t)\cdot\sin(k\Omega t)\,dt$$

Definition 7.11 Anta att f är T-periodisk och L^1.

Då kallas c_0 och $a_k = \frac{2}{T}\int_P f(t)\cos(k\Omega t)\,dt$, $b_k = \frac{2}{T}\int_P f(t)\sin(k\Omega T)\,dt$

(de trigonometriska Fourierkoefficienterna för f.

Serien $FS_f^{trig}(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k \cdot \cos(k\Omega t) + b_k \cdot \sin(k\Omega t))$ kallas för (den trigonometriska) Fourierserien för f.

Ex. 7.12

Beräkna den trigonometriska fourierserien av triangelvågen i ex. 7.10.

Samma c_0 som tidigare: $c_0 = \frac{T}{4}$, $c_k = \frac{T((-1)^k - 1)}{2\pi^2 k^2}$

Vi får $a_k = c_k + c_{-k} = \frac{T((-1)^k-1)}{2\pi^2 k^2} + \frac{T((-1)^{-k}-1)}{2\pi^2(-k)^2} = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^3 = -1 \\ (-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} \end{array} \right.$

$= \frac{T((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2}$ lika.

$b_k = i(c_k - c_{-k}) = 0$

Den trigonometriska fourierserien blir

$$FS_g^{trig}(t) = \frac{T}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{T((-1)^k-1)}{\pi^2 k^2} \cos(k\Omega t)$$

Har vi jämna funktioner $\Leftrightarrow$ endast cosinus

udda funktioner $\Leftrightarrow$ endast sinus