FÖRELÄSNING 12

12 februari

$f_n \to f$ punktvis på D om $\lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p)$ för alla $p \in D$.

$f_n \to f$ likformigt på D om $\|f_n - f\|_D \to 0$ då $n \to +\infty$

Funktionsserier

$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z)$ Partialsummor $S(z) = \sum_{k=1}^{N} u_k(z)$

Restsummor: $r_N(z) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k(z)$

$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z)$ konvergerar punktvis mot $u(z)$

om $\lim_{N\to+\infty} S_N(z) = u(z)$ punktvis

$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z)$ konvergerar likformigt mot $u(z)$ om

$S_N(z) \to u(z)$ likformigt. $(\Leftrightarrow \|r_N\| \to 0$ då $N \to +\infty)$

Exempel 6.22

Låt $u_k(x) = x^k$, dvs. vi betraktar $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$

Vi vet att serien är en geometrisk serie och konvergerar på $I = (-1,1)$ punktvis mot $\frac{1}{1-x} = u(x)$

Är konvergensen likformig? $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k = 1 \cdot \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

Så likformig konvergens

$\Leftrightarrow$

$\left\|\frac{x^{N+1}}{1-x}\right\| \to 0$ då $N \to +\infty$

$$r_N(x) = u(x) - S_N(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

$\|x^{N+1}\| \not\to 0$ (se förra föreläsningen)

Det följer att $\left\|\frac{x^{N+1}}{1-x}\right\| \not\to 0$ då $N \to +\infty$

Så $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, men konvergens är inte likformig på $(-1,1)$

Sats 6.23 Weierstrass M-test

Antag att u_k är en följd av funktioner på D. Om $\|u_k\| \leq M_k$ och $\sum_{k=1}^{+\infty} M_k$ konvergerar så konvergerar funktionsserien $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z)$ likformigt på D.

Ex. 6.29

Visa att funktionsserien $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x\sin(kx)}{k^2}$ konvergera likformigt på varje intervall av typ $[-R,R]$, $R>0$

Vi uppskattar $\left\|\frac{x\sin(kx)}{k^2}\right\|_{[-R,R]} = \underset{x\in[-R,R]}{\overset{(\sup)}{\max}} \left|\frac{x\sin(kx)}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}|x|\cdot|\sin(kx)|$

$\leq \frac{R}{k^2}$

sup = max, på slutet intervall

Låt $M_k = \frac{R}{k^2}$, så vi vet att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{R}{k^2}$ är konvergent (p-serie med

Weierstrass M-test ger nu att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x\sin(kx)}{k^2}$ är likformigt konvergent.

Sats 6.26

- $u_k(z)$ kontinuerliga på D
- $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(z)$ konvergerar likformigt mot $u(z)$

Då är $u(z)$ också kontinuerlig

I ex. 6.24 så får vi att $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x\sin(kx)}{k^2}$ konvergerar mot funktion som är kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$!

Sats 6.27

Antag att $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt på $I=[a,b]$.
Då är $\int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$

Se sats 6.28 för motsvarande sats för derivering.

Observera: Omvändningen till Weierstrass M-test är ej sann.

Ex. 6.25 Låt $u_k(x) = (-1)^k \frac{x^k}{k}$, på $I=[0,1]$. Visa att $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt (men att "M-testet" inte fungerar.

Supremumnormen, $\| u_k(x) \| = \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{(-1)^k \cdot x^k}{k} \right| = \frac{1}{k}$, och $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ är divergent.

Men om $x\in[0,1]$ så är serien $u_k(x)$ alternerande och $k \mapsto \left| \frac{(-1)^k x^k}{k} \right| = \frac{x^k}{k}$ är avtagande och har gränsvärdet 0.

För alternerande serier så har vi resttermsuppskattning

$|r_N(x)| \leq |u_{N+1}(x)| = \frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}$ för $x\in[0,1]$

så $\|r_N\| \leq \frac{1}{N+1} \to 0$ så serien konvergerar likformigt i $[0,1]$.

Lin-alg: $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ utgör bas i rummet om varje $\bar{u}$ i rummet kunde skrivas som en linjärkombination av dessa entydligt.

$$\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \bar{u}_3$$

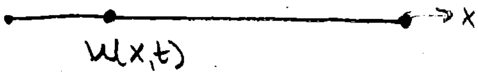
Man kan se $\{e^{ikt}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ som bas för $L^2(0,\pi) =$

$= \{u, \int |u|^2 < +\infty\}$

Varje $u \in L^2$ kan skrivas $u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$

Kapitel 7 - Fourierserier

Ex. 1



Stång av något material.

$0 < x < 1$

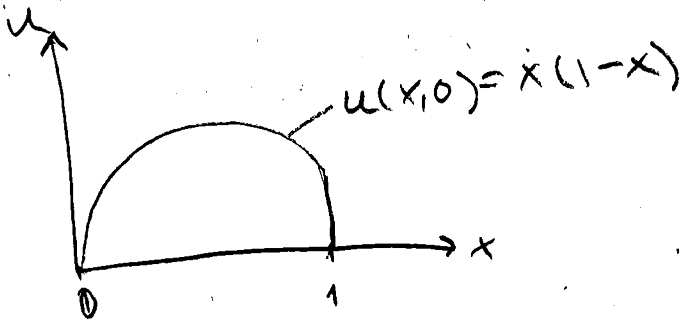
$u(x,t)$ - temperatur beror av x och tid, t.

Om vi håller ändpunkterna vid en specifik temperatur

$u(0,t) = 0$

$u(1,t) = 0$

$u(x,0) = x(1-x)$



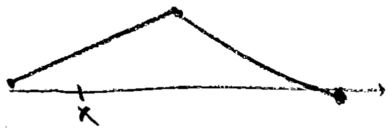
$u'_t = C \cdot u''_{xx}$

"Värmeledningsekvation"

Bestäm u!

Ex. 2 Gitarrsträng

$u(x,0)$



"Någon håller upp gitarrsträngen på mitten"

u = höjden från jämviktsläget

$$\begin{cases} u'_t(x,0) = 0 & (1) \\ u(0,t) = 0 & (2) \\ u(1,t) = 0 & (3) \\ u''_{tt} = c^2 u''_{xx} \text{ - Vågekvationen} & (4) \end{cases}$$

Ansättning:

$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$

$$\left.\begin{aligned} u'_t &= X(x) \cdot T'(t) \\ u''_{xx} &= X''(x) \cdot T(t) \end{aligned}\right\}$$

$u'_t = u''_{xx}$ ger $X(x)T'(t) = X''(x) \cdot T(t)$

antar $T(t) \neq 0$.

$$\underbrace{\frac{T'(t)}{T(t)}}_{\text{Beror ej på } x} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{Beror ej av } t} =$$

konstant

$= -\mu^2$

Vi får $\begin{cases} X''(x)+\mu^2 X(x)=0 \\ T'(t)+\mu^2 T(t)=0 \end{cases}$ dessa kan vi lösa enligt Endi

Vi kan dessutom kräva att: $\begin{cases} X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases}$

$$X(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)$$

$$0=X(0)=A$$

$$0=X(1)=B\sin(\mu)$$

$B=0$ ger nollfunktionen (ej intressant) $\Rightarrow \sin(\mu)=0$

så $\mu=\mu_k=\pi k$, $k>0$ heltal (då $k<0$ kan flyttas ut ur $\sin()$ och fö summa)

$$X(x)=X_k(x)=B_k\sin(\pi k x) \quad k=1,2,\ldots$$

För varje $\mu=\mu_k$ får vi T-ekvation:

endim
$f'=kf$
$f=e^{kx}$

$$T_k'(t)+(\pi k)^2 T_k(t)=0$$

Integrerande faktor $T_k(t)=C_k e^{-(\pi k)^2 t}$

Definiera nu $u_k(x,t)=\underbrace{D_k}_{B_k\cdot C_k} e^{-(k\pi)^2 t}\cdot\sin(k\pi x)$, $k=1,$

Varje u_k uppfyller (1), (2), (4), men inte (3)

Varje summa $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} D_k e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi t)$

Varje summa uppfyller (1), (2) och (4).

Låt $u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty} D_k e^{-(k\pi)^2 t}\cdot\sin(k\pi x)$. Kan vi välja D_k

så att $t=0 \Rightarrow x(1-x)=u(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty} D_k\sin(k\pi x)$?

Fourier påstod att detta funkar för alla funktioner.

Ja! Det gör (nästan) alltid! $D_k=\frac{8}{(\pi k)^3}$ k udda, 0 k

Vi ska hitta koefficienter så att detta är möjligt