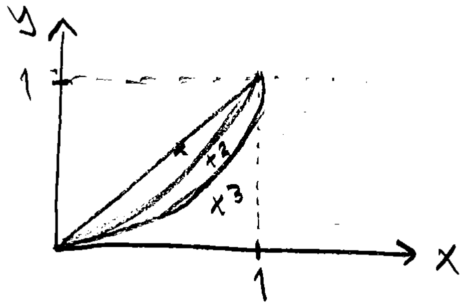
FÖRELÄSNING 11 — 10 februari

Kapitel 6 - Funktionsföljder & funktionsserier

Ex. 6.3

För varje $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ definierar vi $f_n(x) = x^n$

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, ...



Är det så att $f_n(x)$ närmar sig någon funktion $f(x)$ då $n \to +\infty$?

Gäller det att $f_n(p)$ har något gränsvärde för $p \in [0,1]$?

- $f_n(0) = 0 \to 0$ då $n \to +\infty$
- $f_n(1) = 1 \to 1$ då $n \to +\infty$
- $0 < p < 1$, $f_n(p) = p^n \to 0$ då $n \to +\infty$

För funktionen $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ gäller

att $f_n(p) \to f(p)$ för $p \in [0,1]$

Definition 6.2

En funktionsföljd, $f_n(p)$ definierad på D sägs konvergera punktvis (på D) mot funktion f om det för varje $p \in D$ gäller att talföljden, $f_n(p)$ konvergerar mot $f(p)$.

Observera: Kontinuerliga funktioner f_n kan konvergera punktvis mot icke-kontinuerlig f.

Ex. (jfr 6.5)

Låt $f_n(x) = n^2 x \cdot (1-x^2)^n$, $0 \le x \le 1$

Funktionsföljden konvergerar punktvis mot $f(x) = 0$, $0 \le x \le 1$

$$\left[\begin{array}{l} f_n(0) = 0 \\ f_n(1) = 0 \\ 0 < p < 1 \quad f_n(p) = n^2 p \underbrace{(1-p^2)}_{0 \le 1-p^2 < 1}{}^n \to 0 \text{ då } n \to +\infty \end{array}\right]$$

Vi undersöker om $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$ (*)

VL: $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n\,dx = \left[\begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x\,dx \\ dx = \frac{du}{-2x} \\ x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=0 \end{array}\right] = -\int_1^0 n^2 \cdot u^n \cdot \frac{1}{2}\,du =$

$= \int_0^1 n^2 \cdot u^n \cdot \frac{1}{2}\,du = \left[\frac{n^2}{2} \cdot \frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n^2}{2n+2}$, så $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n+2} = +\infty$

HL: Eftersom $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ för alla $x \in [0,1]$ så är

$\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

$\Rightarrow$ (*) gäller inte!

Ex (jfr 6.4)

$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin(nx)$; $x \in \mathbb{R}$

$f_n(x) \to 0$ punktvis då $n \to \infty$ ty $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{|\sin(nx)|}_{\le 1} \le \ldots \to \ldots$

Vi undersöker om $\lim_{n \to +\infty} f_n'(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ (*).

HL: $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ så $\frac{d}{dx} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

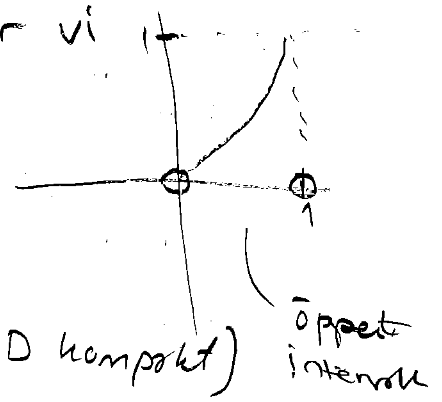
VL: $f_n'(x) = \sqrt{n} \cdot \cos(nx)$, speciellt $f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$ då $n \to +\infty$

(*) STÄMMER EJ!

Slutsats

Punktvis konvergens räcker inte för att få kasta om gränsvärdesprocesser.

Definition: Om $D \subset \mathbb{C}$ ($D \subset \mathbb{R}$) och $f : D \to \mathbb{R}$ är en funktion på D så definierar vi $\sup_D f = \sup\{f(x) ; x \in D\}$. Om f antar ett största värde på D så är det precis $\sup_D f$.



(detta gäller t.ex. om f är kontinuerlig & D kompakt)

Def (6.7) $\|f\|$

Om $f: D \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ så definierar vi supremumnormen (även kallad L^∞-normen) av f som $\|f\| = \sup_D |f|$

$1 \le p < +\infty$

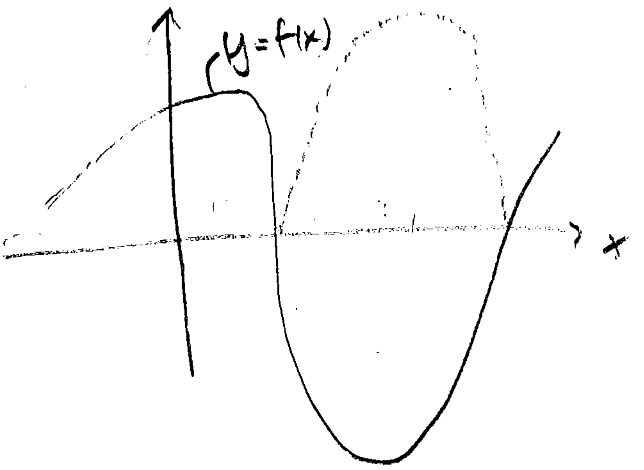
L^p $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

En norm har följande egenskaper

1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

2) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

3) $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$



" vänder upp alla negativa värden.

Definition 6.8

Funktionsföljden (f_n) definierade på D sägs vara likformigt konvergent mot funktionen f på D om $\|f_n - f\| \to 0$ då $n \to +\infty$

Sats 6.12

Om f konvergerar till f likformigt så gäller det att $f_n \to f$ punktvis.

Bevis:

Låt $z \in D$. Då är $0 \leq |f_n(z - f(z)| \leq \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)|$ $= \|f_n - f\|$

$f_n \to f$ likformigt ger $\|f_n - f\| \to 0$ Instängning ger att $|f_n(z) - f(z)| \to 0$.

Ex. (jfr 6.9)

$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$ mot $f(x) = 0$

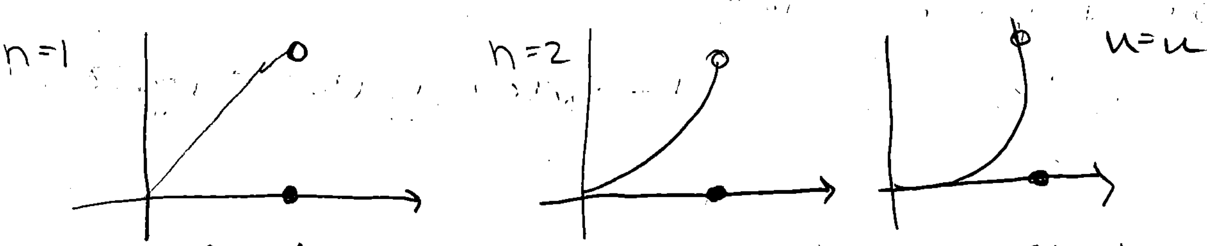
- Vi vet att $f_n(x) \to f(x) = 0$ punktvis.
- $\underset{\overset{\|}{0}}{\|f_n - f\|} = \|f_n\| = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$
- Instängning ger $\|f_n - f\| \to 0$, då $n \to +\infty$, så $f_n \to f$ likformigt på $\mathbb{R}$.

Ex. 6.10 Exempel som inte konvergerar likformigt.

$f_n(x) = x^n$ konvergerar inte likformigt mot $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Vi visar att $\|f_n - f\| = 1$ för alla n.

Vi ritar $f_n(x) - f(x)$ för några n.



$\underbrace{\|f_1 - f\|}_{\text{Största värdet}} = 1$ $\qquad \|f_2 - f\| = 1$ $\qquad \|f_n - f\| = 1$

" $\|f_n - f\|$ avtar således inte mot noll $\Rightarrow$ ej likformig "

$\boxed{\text{funktionsteori.se}}$

$f_n \not\to f$ likformigt på $[0,1)$

Men! Låt $0 < r < 1$

$f_n \to f$ likformigt på $[0, r]$

Sats 6.13

Om f_n är kontinuerliga och $f_n \to f$ likformigt så är f kontinuerlig

Bevis ($\varepsilon/3$ - bevis)

Anta f_n kontinuerlig och $f_n \to f$ likformigt.

Visa att f är kontinuerlig. (i z_0)

Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Vi vill visa att det finns $\delta > 0$ så att

$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Vi skriver $|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(z_0) + f_N(z_0) - f(\ldots$

- Eftersom $f_n \to f$ likformigt finns N så att $n \geq N$ så är $\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$
- Eftersom f_N är kontinuerlig så finns $\delta > 0$ så att $|z - z_0| < \delta \Rightarrow$ $\Rightarrow |f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Antag att N och δ är som ovan och att $|z - z_0| < \delta$. Då är

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \underbrace{|f(z) - f_N(z)| + f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)|}_{\text{Triangelolikheten}}$$

$$\leq \|f - f_N\| + \varepsilon/3 + \|f_N - f\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

så f är kontinuerlig VSV.

Sats 6.16

$I = [a,b]$, f_n kontinuerlig, $f_n \to f$ likformigt på I.

Då gäller att $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{f(x)}_{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)}\,dx$

Sats 6.20

$I \subset \mathbb{R}$ intervall f_n följd av C^1-funktioner, $f_n \to f$ punktvis.

Om derivatorna till f konvergerar likformigt, dvs.

$f_n' \to g$ likformigt. Då är $g = f'$ (så $f_n' \to f'$)