Föreläsning 10

9. Februari

Betingad konvergens: En serie $\sum a_k$ kallas betingat konvergent om den är konvergent men inte absolutkonvergent.

Ett enda enkelt test: Leibniz test för alternerande serier.

Anta att

1) serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är alternerande, (dvs $a_k \in \mathbb{R}$, varannan positiv, varannan negativ)

2) $|a_k|$ är avtagande "Om vi ignorerar tecknet så blir termerna mindre och mindre"

3) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

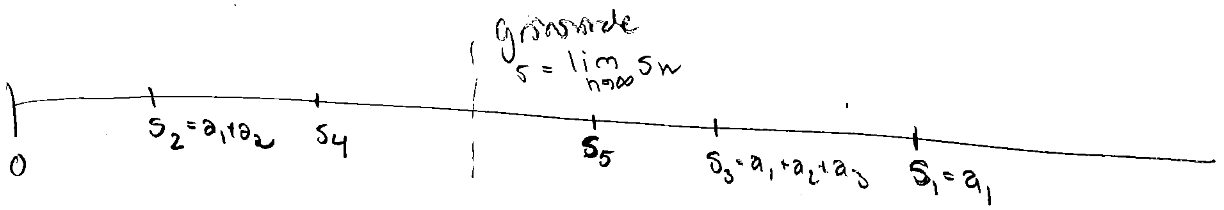
Då är serien konvergent

Anm 1. Kan aldrig användas till att visa att en serie är divergent.

Anm 2. Att beloppet av talen blir mindre och mindre (2.) innebär det inte att de går mot noll (3)
$2 \not\Rightarrow 3$

t.ex. $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ går mot 1 inte 0.

Tredje villkoret måste vara uppfyllt för alla konvergenta serier.



"De positiva och negativa termerna tar ut varandra"

Seriens sanna värde ligger alltid mellan två på varandra följande partialsummor.

Ex. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k}$ ej absolut konvergent, termerna går för långsamt mot 0.

1, serien är alternerande: täljaren är alternerande, nämnare positiv.

2, $|a_k| = \left|\frac{(-1)^k}{\ln k}\right| = \frac{1}{\ln k}$ avtagande eftersom täljaren är konstant och nämnaren växande

3, $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k} = 0$, eftersom täljaren begränsad och nämnaren $\to \infty$

Ex. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+4)\cdot(-1)^k}{k^2+1}$

1, Alternerande? Alla tal som dyker upp bortsett från den alternerande termen är positiv.

3, $\lim_{k\to\infty} \frac{(k+4)(-1)^k}{k^2+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k}(\overset{\to 1}{1+\frac{4}{k}})\overset{\pm 1}{(-1)^k}}{k^{\cancel{2}}(\underset{\to 1}{1+\frac{1}{k^2}})} = 0$
$\underset{\to\infty}{}$

2, $|a_k| = \left|\frac{(k+4)(-1)^k}{k^2+1}\right| = \frac{k+4}{k^2+1}$, inte självklart att det är avt[agande]

sätt $f(x) = \frac{x+4}{x^2+1}$ $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1) - (x+4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2-8x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{-x^2-8x+1}{(x^2+1)^2} < 0$ för $x \geq 1$

dvs f är avtagande och därmed också $|a_k|$

Alternativ: Visa $a_{k+1} - a_k < 0$

Svar: Serien är konvergent.

Uppskatta seriens värde

Anta att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent

Hur stor är resttermen?

$$r_N = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{N} a_k \right) = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$$

"Om vi hade kunnat räkna ut resttermens värde exakt, hade vi även kunnat beräkna exakta värdet, vilket inte brukar vara möjligt"

=> "Det bästa vi kan hoppas på är att uppskatta $|r_N|$"

Metod 1: Jämföra resttermen med något vi kan beräkna (i praktiken geometrisk serie)

Ex. $s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots \quad (= e)$

Hur stort fel gör vi om vi ersätter s med $s_6 = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!}$?

$$0 \leq r_6 = s - s_6 = \sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Uppskatta $r_6 = \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \ldots = \frac{1}{7!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} + \ldots\right)$

$$\leq \frac{1}{7!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 8 \cdot 8} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{7!}\left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \ldots\right) = \frac{1}{7!}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8^k}$$

geo. serie.

$$= \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7 \cdot 7!} \approx 0.00023$$

Slutsats: $s_6 \leq s \leq s_6 + 0.00023$

Metod 2: Uppskatta med integraler

Anta att $0 \le a_k = f(k)$ där f avtagande

Då
$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le r_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \le \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx$$

Ex. Hur stort måste N väljas för att $r_N < 10^{-5}$ när vi approximerar $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$?

Sätt $f(x) = \frac{1}{x^4}$ (avtagande!) dvs:

$$\left(\frac{1}{3(N+1)^3} = \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx \le r \right) \le \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{N}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx = \left[\frac{x^{-3}}{-3} \right]_N^{\infty} = \frac{1}{3N^3}$$

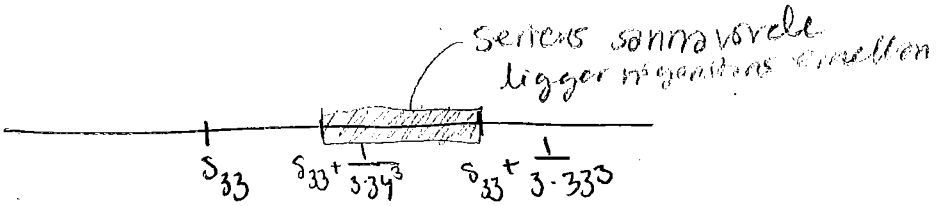
$r_N \le \frac{1}{3N^3}$ för att garantera att $r_N < 10^{-5}$ måste $\frac{1}{3N^3} < 10^{-5}$

$$\Leftrightarrow \quad N^3 = \frac{10^5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad N \ge 33$$

"Om vi vill ha en noggrannhet som att $r_N < 10^{-5}$ måste vi ta med 33 termer"

Om vi har räknat ut $s_{33} = \sum_{k=1}^{33} \frac{1}{k^4}$ så vet vi att

$$\frac{1}{3 \cdot 34^3} \le r_{33} \le \frac{1}{3 \cdot 33^3}$$



Båda gissningar är således mittemellan de två gränserna

Om vi uppskattar $s \approx s_{33} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3 \cdot 34^3} + \frac{1}{3 \cdot 33^3} \right)$ med ett fel $\approx 4 \cdot 10^{-7}$

Metod 3: Uppskatta mha Leibniz

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4}$ Hur stort måste N väljas för att garantera

$|r_N| < 10^{-5}$

Uppfyller villkoren i Leibniz test (Varför?)

"Felet är högst samma som den närmst utelämnade termen"

Då är $|r_N| \leq |a_{n+1}|$ (följer ur beviset av Leibniz!)

$|r_N| = |\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4}| \leq \frac{1}{(N+1)^4}$

Om $|r_N| < 10^{-5}$ ska $\frac{1}{(N+1)^4} < 10^{-5} \Leftrightarrow N+1 > \sqrt[4]{10^5} \approx 17{,}7$

dvs $N \geq 17$