Lösningar kapitel 9

Endimensionell analys

Fabian Ågren, $\pi 11$

Lösta uppgifter

9.3

a)

Bryt ut x^3

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-10x+1}{2x^3+4x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{2+4\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{0-0-0}{2+0+0} = 0$$

b)

Bryt ut x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-10x+1}{3x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

c)

Bryt ut x^6

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^3}{(x^3+2)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^6+4x^3+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}+3\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}}{1+4\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^6}}$$

$$= \frac{1+0+0+0}{1+0+0} = 1$$

d)

Bryt ut x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+10x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+10+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{\infty+10+0}{2+0} = \infty$$

9.5

a)

Bryt ut 2^x och använd standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^8+4x+2^x}{2^x+x^6+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^8}{2^x}+\frac{4x}{2^x}+1}{1+\frac{x^6}{2^x}+\frac{1}{2^x}} = \frac{0+0+1}{1+0+0} = 1$$

b)

Bryt ut e^x och använd standardgränsvärdena $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$,
$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_b x}{a^x} = 0$ och $\lim_{x\to\infty} a^x = 0, |a| < 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+2.5^x+\ln x}{2e^x+x^{10}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2.5^x}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}}{2+\frac{x^{10}}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\left(\frac{2.5}{e}\right)^x+\frac{\ln x}{e^x}}{2+\frac{x^{10}}{e^x}}$$

$$= \frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

Observera att $\frac{2.5}{e} < 1$.

9.6

a)

Gör ett variabelbyte och använd standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^{300}}{x} = \begin{bmatrix} t = \ln x \Longrightarrow x = e^t \\ x \to \infty \Longrightarrow t \to \infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{300}}{e^t} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(5x^2)}{\ln(6x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln 5 + 2\ln x}{\ln 6 + 3\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln 5}{\ln x} + 2}{\frac{\ln 6}{\ln x} + 3} = \frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3}$$

c)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x + \ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln x \Longrightarrow x = e^t \\ x \to \infty \Longrightarrow t \to \infty \end{bmatrix} = \lim_{x\to\infty} \frac{te^t}{e^t + t}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{t}{1 + \frac{t}{e^t}} = \frac{\infty}{1+0} = \infty$$

9.8

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \cdot \sin x = 0$$

Det sista steget gäller eftersom $\sin x$ är begränsad och $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Detta enligt följdsatsen till instängningssatsen.

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \cos x \cdot \frac{1}{\ln x} = 0$$

Det sista steget gäller eftersom $\cos x$ är begränsad och $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$. Detta enligt följdsatsen till instängningssatsen.

c)

Eftersom det inte finns funktioner som kan stänga in $x \sin x$ (funktionen kan bli hur liten som helst och hur stor som helst) är den enda slutsatsen att ett gränsvärde inte existerar.

d)

Notera att $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\arctan x} = \lim_{x\to\infty} \ln x \cdot \frac{1}{\arctan x} = \infty \cdot \frac{2}{\pi} = \infty$$

9.10

b)

Förläng med konjugatet och bryt ut x^2. Eftersom vi jobbar med positiva värden på x kan vi sätta $\sqrt{x^2} = x$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \frac{3-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

c)

Samma tillvägagångssätt som i b). Den här gången jobbar vi med negativa värden på x så sätt $\sqrt{x^2} = -x$ istället.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}) \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= -\frac{3-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

9.12

a)

Se bokens lösning

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \begin{bmatrix} t=2x \Longrightarrow x=\frac{t}{2} \\ x\to\infty \Longrightarrow t\to\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}} = \lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{x^3}} = e^0 = 1$$

d)

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2}{x}\ln x} = e^{2\cdot 0} = e^0 = 1$$

Observera att $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ är ett standardgränsvärde.

e)

$$\lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^x = (2+0)^\infty = 2^\infty = \infty$$

9.13

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-3} = \frac{1+2}{1-3} = -\frac{3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x\to 0} (x+2) = 0+2 = 2$$

c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

9.15

a)

Lutningen är

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

När x går mot 1 har vi

$$\lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

b)

Lutningen är

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = x+a$$

När x går mot a har vi

$$\lim_{x\to a} (x+a) = 2a$$

c)

Se bokens svar.

9.17

a)

Standardgränsvärde

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \begin{bmatrix} t = 3x \Longrightarrow x = \frac{t}{3} \\ x \to 0 \Longrightarrow t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{\frac{t}{3}}$$

$$= 3 \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 3 \cdot 1 = 3$$

c)

Standardgränsvärde

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{7x} = \begin{bmatrix} t = 2x \Longrightarrow x = \frac{t}{2} \\ x \to 0 \Longrightarrow t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\frac{7}{2}t} = \frac{2}{7} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{2}{7}$$

e)

Standardgränsvärde

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$$

f)

$$\lim_{x\to 0^+} 2x \ln(5x) = \lim_{x\to 0^+} 2x(\ln 5 + \ln x) = \lim_{x\to 0^+} 2(x \ln 5 + x \ln x) = 2(0+0) = 0$$

g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ x \to 0 \Longrightarrow t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

h)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 3x} = \begin{bmatrix} t = 3x \Longrightarrow x = \frac{t}{3} \\ x \to 0 \Longrightarrow t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{3}}{\sin t} = \frac{1}{3} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot 1^{-1} = \frac{1}{3}$$

i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1^{-1}=\frac{1}{3}$$

Alternativ lösning (utan standardgränsvärden):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin(x+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x(1-2\sin^2 x)+\cos x\sin 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x(1-2\sin^2 x)+\cos x(2\cos x\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-2\sin^2 x+2\cos^2 x}$$
$$=\frac{1}{1-0+2}=\frac{1}{3}$$

j)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{4x}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\right)^{-1}$$
$$=\frac{3}{4}\cdot 1\cdot 1^{-1}=\frac{3}{4}$$

9.18

a)

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$$

b)

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln(\sin x)}=e^0=1$$

9.21

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x(x^2-1)}=\begin{bmatrix}t=x-1\Longrightarrow x=t+1\\ x\to 1\Longrightarrow t\to 0\end{bmatrix}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{(t+1)((t+1)^2-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t(t+1)(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t+2}\cdot\frac{\ln(t+1)}{t}\right)=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x} = \begin{bmatrix} t=\frac{\pi}{2}-x \implies x=\frac{\pi}{2}-t \\ x\to\frac{\pi}{2} \implies t\to 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{t\to 0} -\frac{\sin t}{t} = -1$$

c)

$$\lim_{x\to 0} = \frac{\arctan 2x}{3x} = \begin{bmatrix} t=\arctan 2x \implies x=\frac{1}{2}\tan t \\ x\to 0 \implies t\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{3}{2}\tan t}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin t}\cdot\cos t\right) = \frac{2}{3}\lim_{t\to 0}\left(\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{-1}\cdot\cos t\right) = \frac{2}{3}\cdot 1^{-1}\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

d)

$$\lim_{x\to 0^+} x^3 e^{\frac{1}{x}} = \begin{bmatrix} t=\frac{1}{x} \implies x=\frac{1}{t} \\ x\to 0^+ \implies t\to\infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^3 e^t = \lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{t^3} = \infty$$

Det sista steget är standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = \infty$.

9.25

a)

Funktionen i 7.12 a) är

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2, & x\geq 0 \end{cases}$$

Både $-x$ och x^2 är kontinuerliga funktioner så det återstår att kontrollera gränsövergången då $x=0$. Alltså

$$\lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

och

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

Gränsvärdena är lika och funktionen f är därför kontinuerlig i sin helhet. Funktionen i 7.12 b) är

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ x+1, & 0\leq x<1 \\ -x^2, & x\geq 1 \end{cases}$$

1, $x+1$ och $-x^2$ är alla kontiunerliga så det återstår att undersöka gränsövergångarna. Undersöker vi

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$$

och jämför med

$$\lim_{x\to 1^+} -x^2 = -1$$

så har vi olika gränsvärden vilket visar att g inte är en kontinuerlig funktion.

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$$

Eftersom gränsvärdet är lika med 3 sker inget hopp i punkten $x=1$ och funktionen h är därför kontinuerlig.

9.30

a)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=1-2^{-n}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=1-2^{-n}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\lim_{n\to\infty}(1-2^{-n})=1-0=1$$

d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-0=1$$

9.31

a)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k-1=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k-1=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{3}-1}-1=$$

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-3}{2}-1=-\frac{0-3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{-\frac{1}{3}-1} - 1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{4} - 1 = \frac{0+3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

c)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1} = \lim_{n\to\infty} 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3 - 0 = 3$$

d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^k = \sum_{k=0}^{\infty}2^k - 1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}2^k - 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 1 = \lim_{n\to\infty} 2^n - \frac{3}{2} = \infty - \frac{2}{3} = \infty$$

9.32

a)

Se bokens lösning.

b)

Precis som i a) så konvergerar serien för $|x| < 1$. För dessa x konvergerar summan till

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}x^k - 1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k - 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{x^n x - 1}{x-1} - 1$$

$$= \frac{0\cdot x - 1}{x-1} - 1 = \frac{x}{1-x}$$