Lösningar kapitel 8

Endimensionell analys

Fabian Ågren, $\pi 11$

Lösta uppgifter

8.8

a)

$$3^x + 3^{x+1} = 3^x + 3^x 3^1 = 3^x(1+3) = 4 \cdot 3^x$$

b)

$$e^x + e^{x+1} = e^x + e^x e^1 = e^x(1+e)$$

c)

Använd kvadreringsregeln på parantesen

$(e^x + e^{-x})^2 - e^{2x} - e^{-2x} = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} - e^{-2x} = 2e^x e^{-x} = 2e^{x-x} = 2$

d)

$$\frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{x+1}} = e^{-x} + e^{-(x+1)} = e^{-(x+1)}(e+1) = e^{-x-1}(e+1)$$

8.14

a)

$$\lg \frac{7}{4} + \lg \frac{8}{7} = \lg \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7} = \lg 2$$

b)

$$\frac{1}{2} \ln 100 - 2 \ln 2 = \ln 100^{\frac{1}{2}} - \ln 2^2 = \ln 10 - \ln 4 = \ln \frac{10}{4} = \ln \frac{5}{2}$$

c)

$$\lg 36 - 3 \lg 6 = \lg 36 - \lg 6^3 = \lg \frac{36}{6^3} = \lg \frac{6^2}{6^3} = \lg \frac{1}{6}$$

d)

$$^3 \log 27 = 3$$

e)

$$^2 \log 11 +^2 \log \frac{1}{11} =^2 \log 11 \cdot \frac{1}{11} =^2 \log 1 = 0$$

f)

$$\frac{1}{2}(\ln 16 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\frac{16}{4} = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 4^{\frac{1}{2}} = \ln 2$$

8.15

a)

$$\ln\frac{1}{x^2} + \ln x^3 = \ln\frac{x^3}{x^2} = \ln x$$

b)

$$\ln e^{2x} = 2x\ln e = 2x \cdot 1 = 2x$$

c)

Enligt definition:

$$e^{\ln t} = t$$

d)

$$\ln e^x + \ln e^{-x} = \ln e^x e^{-x} = \ln e^0 = \ln 1 = 0$$

8.17

a)

Nej, tillexempel

$$\ln 2 = \ln(1+1) \neq \ln 1 + \ln 1 = 0 + 0 = 0$$

8.19

$$3^x = e^{\ln 3^x} = e^{3\ln x} = e^y$$

Svaret är $y = 3\ln x$.

8.21

a)

$$10^x = 2.72 \iff \lg 10^x = \lg 2.72 \iff x\lg 10 = \lg 2.72 \iff x = \lg 2.72$$

e)

$$3 \cdot 10^x + 4 = 21 \iff 10^x = \frac{17}{3} \iff \lg 10^x = \lg \frac{17}{3} \iff x \lg 10$$

$$= \lg \frac{17}{3} \iff x = \lg \frac{17}{3}$$

8.22

c)

$$7e^x - 2 = 3 \iff e^x = \frac{5}{7} \iff \ln e^x = \ln \frac{5}{7} = x \ln e = \ln \frac{5}{7} \iff x = \ln \frac{5}{7}$$

8.23

a)

$$\ln x = 3.8 \iff e^{\ln x} = e^{3.8} \iff x = e^{3.8}$$

f)

$$3 \ln x + 7 = 4 \iff \ln x = -1 \iff e^{\ln x} = e^{-1} \iff x = e^{-1}$$

8.24

a)

Sätt att $t = 2^x$, då har vi att $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$

$$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \iff t^2 - 6t + 8 = 0 \iff (t-3)^2 - 1 = 0$$

$$\iff (t-3)^2 = 1 \iff t - 3 = \pm 1 \iff t = 3 \pm 1$$

Vi har nu två fall, vi börjar med $t = 2$:

$$t = 2 \iff 2^x = 2 \iff x = 1$$

Nästa fall då $t = 4$:

$$t = 4 \iff 2^x = 4 \iff x = 2$$

8.25

a)

$$\lg x = 3 + \lg 2 \iff \lg x - \lg 2 = 3 \iff \lg \frac{x}{2} = 3 \iff 10^{\lg \frac{x}{2}} = 10^3$$

$$\iff \frac{x}{2} = 1000 \iff x = 2000$$

c)

$$\lg x = 2\lg 5 - 1 \iff \lg x = \lg 5^2 - 1 \iff \lg x = \lg 25 - 1 \iff \lg x - \lg 25 = -1$$

$$\iff \lg \frac{x}{25} = -1 \iff 10^{\lg \frac{x}{25}} = 10^{-1} \iff \frac{x}{25} = \frac{1}{10} \iff x = \frac{5}{2}$$

8.27

a)

$$\lg(\lg x) = 3 \iff 10^{\lg(\lg x)} = 10^3 \iff \lg x = 10^3$$

$$\iff 10^{\lg x} = 10^{10^3} \iff x = 10^{10^3}$$

b)

Sätt att $y = e^x$. Då är $e^{2x} = (e^x)^2 = y^2$. Vi har nu att

$$e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \iff y^2 - 2y - 3 = 0 \iff (y-3)(y+1) = 0$$

Enligt faktorsatsen har ekvationen lösningarna $y = -1$ ocy $y = 3$. Vi börjar med den förstnämnda och byter tillbaka till e^x

$$y = -1 \iff e^x = -1$$

Den här ekvationen saknar reella lösningar. Ta nästa fall:

$$y = 3 \iff e^x = 3 \iff \ln e^x = \ln 3 \iff x = \ln 3$$

c)

$$\lg(x+2) = 1 + \lg x \iff \lg(x+2) - \lg x = 1 \iff \lg \frac{x+2}{x} = 1$$

$$\iff 10^{\lg \frac{x+2}{x}} = 10^1$$

$$\iff \frac{x+2}{x} = 10 \iff x + 2 = 10x \iff x = \frac{2}{9}$$

8.28

a)

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6 \iff \ln(x(x-1)) = \ln 6 \implies x(x-1) = 6$$

$$\iff x^2 - x - 6 = 0 \iff (x-3)(x+2) = 0$$

Ekvationen har enligt faktorsatsen lösningarna $x = -2$ och $x = 3$. Testa lösningarna genom att sätta in dem i den ursprungliga ekvationen. Då ser vi att $\ln -2$ inte är definierat. Ekvationen har alltså endast lösningen $x = 3$.

b)

$$\ln x^2 = \ln x^3 \Longrightarrow x^2 = x^3 \Longleftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2(x-1) = 0$$

Denna ekvation har enligt faktorsatsen lösningarna $x = 0$ och $x = 1$. Testa lösningarna i den ursprungliga ekvationen så ser vi att $\ln 0$ inte är definierat. Därför är $x = 1$ den enda korrekta lösningen.

c)

$$2\ln(x-4) = \ln x + \ln 2 \Longrightarrow \ln(x-4)^2 = \ln 2x \Longleftrightarrow (x-4)^2 = 2x$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x-8) = 0$$

Ekvationen har enligt faktorsatsen lösningarna $x = 2$ och $x = 8$. Vi ser att den ursprungliga ekvationen inte är definierad för $x = 2$, därför är $x = 8$ den enda korrekta lösningen.

d)

$$\ln x + \ln(x-2) = 2 \Longrightarrow \ln(x(x-2)) = 2 \Longleftrightarrow e^{\ln(x(x-2))} = e^2 \Longleftrightarrow x(x-2) = e^2$$

$$x^2 - 2x - e^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 - 1 - e^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 1 + e^2$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{1+e^2} \Longleftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+e^2}$$

Testa lösningarna i den ursprungliga ekvationen så ser vi att $x = 1 - \sqrt{1+e^2}$ inte är definierad därför är $x = 1 + \sqrt{1+e^2}$ den enda korrekta lösningen.

e)

$$\ln(3^x + 3^{x+1}) = 1 \Longleftrightarrow e^{\ln(3^x + 3^{x+1})} = e^1 \Longleftrightarrow 3^x + 3^{x+1} = e \Longleftrightarrow 3^x(1+3) = e$$

$$\Longleftrightarrow 3^x = \frac{e}{4} \Longleftrightarrow \ln 3^x = \ln\frac{e}{4} \Longleftrightarrow x\ln 3 = 1 - \ln 4 \Longleftrightarrow x = \frac{1 - \ln 4}{\ln 3}$$

8.29

Börja med att beräkna massan efter en halveringstid

$$m(T) = m(0)e^{-\lambda T}$$

Massan vid start är helt enkelt $m(0)$. Vi vet att efter tiden T har massan halverats vilket ger

$$m(T) = \frac{1}{2}m(0)$$

Kombinera dessa två likheter för att hitta sambandet:

$$m(0)e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}m(0) \Longleftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \ln e^{-\lambda T} = \ln\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow -\lambda T \ln e = \ln 1 - \ln 2 \Longleftrightarrow -\lambda T = -\ln 2 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

8.32

Eftersom $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ vet vi att en av triangels kateter har längden 1 och hypotenusan längden 3. Den återstående kateterns längd får vi genom pythagoras sats där x betecknar den okända kateterns längd

$$x^2 + 1^2 = 3^2 \iff x^2 = 8 \iff x = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Enligt definition är då

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Med kateterna kända vet vi även per definition att

$$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}.$$

Vidare gäller att

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

och

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

8.40

a)

$$\sin\alpha = \frac{x}{a} \iff x = a\sin\alpha$$

b)

$$\tan\alpha = \frac{x}{a} \iff x = a\tan\alpha$$

c)

$$\cot\alpha = \frac{x}{a} \iff x = a\cot\alpha$$

d)

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} \iff x = a\cos\alpha$$

e)

$$\cos\alpha = \frac{a}{x} \iff x = \frac{a}{\cos\alpha}$$

f)

$$\sin\alpha = \frac{a}{x} \iff x = \frac{a}{\sin\alpha}$$

8.44

Använd trigonometriska ettan

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \iff \cos^2\alpha + 0.6^2 = 1 \iff \cos^2\alpha = 0.64 \iff \cos\alpha = \pm 0.8$$

8.45

a)

Fall 1:

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

Fall 2:

$$\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

b)

Fall 1:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k \iff x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

Fall 2:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = -\pi - \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k \iff x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\iff x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \iff -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

c)

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k \iff \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

d)

$$\tan x = -1 \iff x = \arctan -1 + \pi k \iff x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

e)

$$\tan x = \sqrt{3} \iff x = \arctan\sqrt{3} + \pi k \iff x = \frac{\pi}{3} + \pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

f)

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \iff 3x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k \iff 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \iff x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

8.48

a)

$$\sin x = \cos 2x \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x$$

enligt 8.41 i kursboken kan ekvationen skrivas om som

$$\frac{\pi}{2} - x = \pm 2x + 2\pi k$$

Fall 1:

$$\frac{\pi}{2} - x = 2x + 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$$

Fall 2:

$$\frac{\pi}{2} - x = -2x + 2\pi k \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

Här noterar vi att $\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$. Fall 1 täcker helt enkelt upp alla lösningar i fall 2. Det räcker därför att skriva alla lösningar på formen i fall 1.

8.52

a)

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$$
$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Det vill säga $A = \sqrt{2}$ och $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

c)

$$-4\sin 2x + 3\cos 2x = 5\left(-\frac{4}{5}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos 2x\right)$$
$$= 5\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\sin 2x + \sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\cos 2x\right)$$
$$= 5\sin\left(2x + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$$

Det vill säga $A = 5$ och $\varphi = \arccos -\frac{4}{5}$.

8.53

$$|\sin x + 2\cos x| = \left|\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)\right| =$$

$$\left|\sqrt{5}\left(\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\sin x + \sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\cos x\right)\right|$$

$$= \left|\sqrt{5}\sin\left(x + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right| = \sqrt{5}\left|\sin\left(x + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right|$$

Eftersom $|\sin t| \leq 1$ för alla t så kan vi konstatera att $|\sin x + 2\cos x| \leq \sqrt{5}$.

8.56

a)

Utnyttja dubbla vinkeln för sinus

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4} \iff \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{4} \iff \sin 2x = \frac{1}{2}$$

Vi har nu två fall. Fall 1:

$$2x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \iff 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{12} + \pi k$$

Fall 2:

$$2x = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \iff 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

c)

Från uppgift 8.52 a) vet vi att

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Vi har då att

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Fall 1:

$$x + \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k$$

Fall 2:

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

e)

$$\sin 4x = \cos 3x \iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \cos 3x$$

som enligt formel 8.41 kan skrivas om som

$$\frac{\pi}{2} - 4x = \pm 3x + 2\pi k$$

Fall 1:

$$\frac{\pi}{2} - 4x = 3x + 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi}{7}k$$

Fall 2:

$$\frac{\pi}{2} - 4x = -3x + 2\pi k \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

f)

Utnyttja att

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Då får vi

$$\cos 2x = 3\sin x + 2 \iff 1 - 2\sin^2 x = 3\sin x + 2 \iff \sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$$

Sätt nu att $t = \sin x$.

$$\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0 \iff t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0 \iff \frac{1}{2}(2t+1)(t+1) = 0$$

Denna ekvation har enligt faktorsatsen lösningarna $t = -1$ och $t = -\frac{1}{2}$. Byt nu tillbaka till $\sin x$. Vi börjar med

$$t = -1 \iff \sin x = -1 \iff x = \arcsin -1 + 2\pi k \iff x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

Nästa fall när $t = -\frac{1}{2}$ delar vi i sin tur upp i två fall. Fall 1:

$$t = -\frac{1}{2} \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff x = \arcsin -\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

Fall 2:

$$t = -\frac{1}{2} \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff x = \pi - \arcsin -\frac{1}{2} + 2\pi k$$

$$\iff x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k \iff x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

8.59

Använd dubbla vinkeln för sinus, trigonometriska ettan och kvadreringsregeln.

$$1 + \sin 2x = 1 + 2\sin x\cos x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x = (\cos x + \sin x)^2$$

8.67

a)

Den löste vi i 8.45 a).

b)

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

c)

Fall 1:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = \arcsin -\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

Fall 2:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \iff x = \pi - \arcsin -\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\iff x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \iff x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

d)

$$\arcsin -\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

8.68

a)

$$\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

b)

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

c)

$$\cos x = -\frac{1}{2} \iff x = \pm \arccos -\frac{1}{2} + 2\pi k \iff x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

d)

$$\arccos -\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

8.69

a)

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k \iff x = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

b)

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

c)

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k \iff x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$.

d)

$$\arctan -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$$

8.76

$$\arcsin Q = \frac{\pi}{6} \iff Q = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

då har vi

$$\arccos Q = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

8.82

a)

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

b)

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$