Lösningar kapitel 5

Endimensionell analys

Fabian Ågren, π11

Lösta uppgifter

5.2

a)

En rät linje beskrivs av ekvationen

$$y = kx + m.$$

Från uppgiften har vi att $k = -1$. Vi har också att $y = 2$ när $x = 0$. Sätter vi in detta i ekvationen kan vi lösa ut m:

$$2 = -(0) + m \Longleftrightarrow m = 2.$$

Alltså är ekvationen vi söker

$$y = -x + 2.$$

b)

Här har vi att $k = 3$. Sätt in $x = 2$ och $y = 1$.

$$1 = 3 \cdot 2 + m \Longleftrightarrow m = -5,$$

vilket ger ekvationen

$$y = 3x - 5.$$

c)

Nu har vi en godtycklig punkt där $x = a$ och $y = b$ och k är en given riktningskoefficient. Sätt in i ekvationen och lös ut m

$$b = ka + m \Longleftrightarrow m = b - ka$$

vilket ger ekvationen

$$y = kx + b - ka \Longleftrightarrow y - b = k(x - a).$$

d)

Börja med att beräkna lutningen av linjen (riktningskoefficienten k). Vi har att $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_2 = a + 1$ och $y_2 = b + 1$

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b + 1 - b}{a + 1 - a} = \frac{1}{1} = 1.$$

För att beräkna m sätter vi in en av punkterna i räta linjens ekvation tillexempel (x_1, y_1)

$$y_1 = kx_1 + m \Longleftrightarrow b = 1 \cdot a + m \Longleftrightarrow m = b - a.$$

Alltså har vi ekvationen

$$y = x + b - a.$$

5.4

a)

Vi har att

$$x_1 = -2, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = -2.$$

Använd tvåpunktsformeln

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \iff y - 1 = \frac{-2 - 1}{1 - (-2)}(x - (-2))$$

$$\iff y - 1 = -(x + 2) \iff y = -x - 1.$$

b)

Vi har att

$$x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 2, y_2 = 2.-$$

Använd tvåpunktsformeln

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \iff y - 2 = \frac{2 - 2}{2 - (-1)}(x - (-1))$$

$$\iff y - 2 = 0 \iff y = 2.$$

5.7

a)

Vid skärning gäller det att

$$2x + 1 = -3x + 11 \iff 5x = 10 \iff x = 2$$

vilket ger x-koordinaten 2. Sätt in denna i någon av ekvationerna för att få ut y, tillexempel den första:

$$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

c)

Vid skärning gäller det att $x = 4$. Sätt in denna i den första linjens ekvation så erhålls y-koordinaten

$$y = 3 \cdot 4 - 2 = 10.$$

Linjerna skär varandra i (4, 10).

5.12

a)

$$|3| = 3$$

b)

$$|-3| = -(-3) = 3$$

c)

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

d)

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

e)

Här har vi två fall: det första, när $x \geq 0$

$$\sqrt{x^2} = x$$

Det andra när $x < 0$

$$\sqrt{x^2} = -x$$

Detta är precis definitionen av absolutbeloppet, alltså är

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

f)

$$\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

5.13

a)

Vi undersöker två fall.

Fall 1: $x \geq 0$

$$|x| = 4 \iff x = 4$$

Fall 2: $x < 0$

$$|x| = 4 \iff -x = 4 \iff x = -4$$

Alltså har ekvationen de två lösningarna $x = \pm 4$.

b)

Här ser vi direkt att det bara finns en trivial lösning $x = 0$.

c)

Absolutbeloppet uppfyller alltid $|x| \geq 0$ för alla reella x. Därför saknar ekvationen lösningar.

d)

Igen två fall:

Fall 1: $x - 2 \geq 0$

$$|x-2| = 4 \iff x - 2 = 4 \iff x = 6$$

Fall 2: $x - 2 < 0$

$$|x-2| = 4 \iff -(x-2) = 4 \iff x = -2$$

Ekvationen har lösningarna $x = -2$ och $x = 6$.

e)

Igen två fall:

Fall 1: $x + 4 \geq 0$

$$|x+4| = 3 \iff x + 4 = 3 \iff x = 7$$

Fall 2: $x + 4 < 0$

$$|x+4| = 3 \iff -(x+4) = 3 \iff x = -1$$

Ekvationen har lösningarna $x = -1$ och $x = 7$.

f)

Igen två fall:

Fall 1: $2x + 1 \geq 0$

$$|2x+1| = 1 \iff 2x + 1 = 1 \iff x = 0$$

Fall 2: $2x + 1 < 0$

$$|2x+1| = 1 \iff -(2x+1) = 1 \iff x = -1$$

Ekvationen har lösningarna $x = -1$ och $x = 0$.

5.23

a)

Fall 1: $x \geq 2$

$$|x-1| + |x-2| = 2 \iff (x-1) + (x-2) = 2 \iff 2x - 3 = 2 \iff x = \frac{5}{2}$$

Fall 2: $1 \leq x < 2$

$$|x-1| + |x-2| = 2 \iff (x-1) - (x-2) = 2 \iff 1 = 2$$

Ekvationen saknar lösningar på intervallet.

Fall 3: $x < 1$

$$|x-1| + |x-2| = 2 \iff -(x-1) - (x-2) = 2 \iff -2x + 3 = 2 \iff x = \frac{1}{2}$$