Lösningar kapitel 3

Endimensionell analys

Fabian Ågren, π11

Lösta uppgifter

3.1

b)

Observera att enligt konjugatregeln är

$$x^2 - 4 = (x+2)(x-2).$$

Då gäller

$$x(x^2-4) = 0 \iff x(x+2)(x-2) = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningarna

$$x = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

d)

Använd kvadreringsregeln

$$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2.$$

Alltså är

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \iff (x+5)^2 = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningen

$$x = -5.$$

f)

Bryt ut x^2 och använd kvadreringsregeln som i d)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = x^2(x^2 + 10x + 25) = x^2(x+5)^2.$$

Då är

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0 \iff x^2(x+5)^2 = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningarna

$$x = 0, \quad x = -5.$$

3.2

a)

Sätt in $x = 2$ i ekvationen och lös ut a.

$$2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0 \iff 12 + a = 0 \iff a = -12$$

3.5

a)

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=0 \iff \frac{x(x+1)+(x-1)(x+1)+x(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=0$$

$$\iff \frac{3x^2-1}{x(x-1)(x+1)}=0 \iff 3x^2-1=0 \iff x^2=\frac{1}{3}$$

$$\iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

d)

Observera att vänsterledet så väl som högerledet inte är definierat för $x=-2$ och $x=2$.

$$\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2}{4-x^2} \iff \frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{x^2}{-(x-2)(x+2)}$$

$$\not\Leftrightarrow x-2-(x+2)^2=-x^2 \iff 3(x+2)=0 \iff x=-2.$$

Detta är inte en korrekt lösning och ekvationen saknar därför lösningar.

3.7

a)

$$\sqrt{x+2}=x \implies x+2=x^2 \iff x^2-x-2=0$$

Identifiera p och q

$$x^2-x-2=0 \iff p=-1, \quad q=-2$$

Lös ekvationen med pq-formeln

$$x=-\frac{-1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2-(-2)}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2} \iff x=-1, \quad x=2.$$

Sätt in dessa lösningar i ursprungsekvationen så märker vi att $x=-1$ är en falsk rot och därmed är den enda giltiga lösningen

$$x=2.$$

b)

$$\sqrt{x+2}=-x \implies x+2=x^2 \iff x^2-x-2=0$$

Denna andragradsekvation löste vi i a) och den har lösningarna $x=-1$ och $x=2$. Sätt i dessa i ursprungsekvationebn så ser vi att $x=2$ är en falsk rot. Ekvationen har en lösning och den är

$$x=-1$$

3.8

a)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \iff x+2 = 2x+1 \iff x = 1$$

c)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} \iff x+2 = x \iff 2 = 0$$

En motsägelse! Ekvationen saknar lösningar.

3.9

a)

$$2 < 3$$

2 är mindre än 3 $\implies$ sant.

b)

$$2 \leq 3$$

2 är mindre eller lika med 3 $\implies$ sant.

c)

$$2 \leq 2$$

2 är mindre än eller lika med 2 $\implies$ sant.

3.11

a)

$$3x+1 < 2 \iff 3x < 1 \iff x < \frac{1}{3}$$

d)

$$(x-3)(x+3) \leq x^2 \iff x^2 - 9 \leq x^2 \iff -9 \leq 0$$

Detta är sant och gäller därför för alla x.

3.12

d)

Ställ upp en teckentabell

x		-2		$\frac{1}{2}$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(2x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser att $x < -2$ och $x > \frac{1}{2}$ löser olikheten.

3.14

a)

Börja med att anta att $x > 0$, då får vi

$$\frac{x^2+1}{x} < x \iff x^2 + 1 < x^2 \iff 1 < 0$$

dvs. det finns inga positiva x som löser olikheten. Anta nu att $x < 0$,

$$\frac{x^2+1}{x} < x \iff x^2 + 1 > x^2 \iff 1 > 0$$

vilket innebär att alla negativa x löser olikheten. Observera att olikheten inte är definierad för $x = 0$. Svaret på uppgiften är alla $x < 0$.

3.15

a)

$$x^2 < 4 \iff x^2 - 4 < 0 \iff (x+2)(x-2) < 0$$

Ställ upp en teckentabell

x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser att $-2 < x < 2$ löser olikheten.

b)

Vi kan använda teckentabellen i a). Nu tittar vi efter positiva värden i tabellen dvs. $x < -2$ och $x > 2$ löser olikheten.

3.17

a)

$$x + \frac{4}{x} = 5 \iff x^2 + 4 = 5x \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningarna $x = 1$ och $x = 4$.

b)

Anta att $x > 0$ då har vi

$$x + \frac{4}{x} > 5 \iff (x-1)(x-4) > 0.$$

Ställ upp en teckentabell:

x		1		4	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ser att $0 < x < 1$ och $x > 4$ löser olikheten. Anta nu att $x < 0$ då har vi istället

$$x + \frac{4}{x} > 5 \iff (x-1)(x-4) < 0.$$

Vi ser att detta endast uppfylls när $1 < x < 4$ men då vi antagit att $x < 0$ är detta ingen giltig lösning. Svaret på uppgiften är alltså $0 < x < 1$ och $x > 4$.