

# Lösningar kapitel 3

Endimensionell analys

Fabian Ågren,  $\pi 11$

## Lösta uppgifter

3.1	.....	2
3.2	.....	2
3.5	.....	3
3.7	.....	3
3.8	.....	4
3.9	.....	4
3.11	.....	4
3.12	.....	4
3.14	.....	5
3.15	.....	5
3.17	.....	5

---

### 3.1

b)

Observera att enligt konjugatregeln är

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2).$$

Då gäller

$$x(x^2 - 4) = 0 \iff x(x + 2)(x - 2) = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningarna

$$x = 0, \quad x = -2, \quad x = 2.$$

d)

Använd kvadreringsregeln

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2.$$

Alltså är

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \iff (x + 5)^2 = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningen

$$x = -5.$$

f)

Bryt ut  $x^2$  och använd kvadreringsregeln som i d)

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = x^2(x^2 + 10x + 25) = x^2(x + 5)^2.$$

Då är

$$x^4 + 10x^3 + 25x^2 = 0 \iff x^2(x + 5)^2 = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningarna

$$x = 0, \quad x = -5.$$

---

### 3.2

a)

Sätt in  $x = 2$  i ekvationen och lös ut  $a$ .

$$2^2 + 4 \cdot 2 + a = 0 \iff 12 + a = 0 \iff a = -12$$

---

### 3.5

a)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0 &\iff \frac{x(x+1) + (x-1)(x+1) + x(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = 0 \\ &\iff \frac{3x^2 - 1}{x(x-1)(x+1)} = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{3} \\ &\iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

d)

Observera att vänsterledet så väl som högerledet inte är definierat för  $x = -2$  och  $x = 2$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2}{4-x^2} &\iff \frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2}{-(x-2)(x+2)} \\ &\iff x-2 - (x+2)^2 = -x^2 \iff 3(x+2) = 0 \iff x = -2.\end{aligned}$$

Detta är inte en korrekt lösning och ekvationen saknar därför lösningar.

---

### 3.7

a)

$$\sqrt{x+2} = x \implies x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$$

Identifiera  $p$  och  $q$

$$x^2 - x - 2 = 0 \iff p = -1, \quad q = -2$$

Lös ekvationen med pq-formeln

$$x = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \iff x = -1, \quad x = 2.$$

Sätt in dessa lösningar i ursprungsekvationen så märker vi att  $x = -1$  är en falsk rot och därmed är den enda giltiga lösningen

$$x = 2.$$

b)

$$\sqrt{x+2} = -x \implies x+2 = x^2 \iff x^2 - x - 2 = 0$$

Denna andragradsekvation löste vi i a) och den har lösningarna  $x = -1$  och  $x = 2$ . Sätt in dessa i ursprungsekvationerna så ser vi att  $x = 2$  är en falsk rot. Ekvationen har en lösning och den är

$$x = -1$$

---

### 3.8

a)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1} \iff x+2 = 2x+1 \iff x = 1$$

c)

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{x} \iff x+2 = x \iff 2 = 0$$

En motsägelse! Ekvationen saknar lösningar.

---

### 3.9

a)

$$2 < 3$$

2 är mindre än 3  $\implies$  sant.

b)

$$2 \leq 3$$

2 är mindre eller lika med 3  $\implies$  sant.

c)

$$2 \leq 2$$

2 är mindre än eller lika med 2  $\implies$  sant.

---

### 3.11

a)

$$3x + 1 < 2 \iff 3x < 1 \iff x < \frac{1}{3}$$

d)

$$(x-3)(x+3) \leq x^2 \iff x^2 - 9 \leq x^2 \iff -9 \leq 0$$

Detta är sant och gäller därför för alla  $x$ .

---

### 3.12

d)

Ställ upp en teckentabell

$x$			-2		$\frac{1}{2}$
$x+2$	-	0	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$(x+2)(2x-1)$	+	0	-	0	+

Vi ser att  $x < -2$  och  $x > \frac{1}{2}$  löser olikheten.

---

### 3.14

a)

Börja med att anta att  $x > 0$ , då får vi

$$\frac{x^2 + 1}{x} < x \iff x^2 + 1 < x^2 \iff 1 < 0$$

dvs. det finns inga positiva  $x$  som löser olikheten. Anta nu att  $x < 0$ ,

$$\frac{x^2 + 1}{x} < x \iff x^2 + 1 > x^2 \iff 1 > 0$$

vilket innebär att alla negativa  $x$  löser olikheten. Observera att olikheten inte är definierad för  $x = 0$ . Svaret på uppgiften är alla  $x < 0$ .

---

### 3.15

a)

$$x^2 < 4 \iff x^2 - 4 < 0 \iff (x + 2)(x - 2) < 0$$

Ställ upp en teckentabell

$x$					
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$(x + 2)(x - 2)$	+	0	-	0	+

Vi ser att  $-2 < x < 2$  löser olikheten.

b)

Vi kan använda teckentabellen i a). Nu tittar vi efter positiva värden i tabellen dvs.  $x < -2$  och  $x > 2$  löser olikheten.

---

### 3.17

a)

$$x + \frac{4}{x} = 5 \iff x^2 + 4 = 5x \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x - 1)(x - 4) = 0$$

som enligt faktorsatsen har lösningarna  $x = 1$  och  $x = 4$ .

b)

Anta att  $x > 0$  då har vi

$$x + \frac{4}{x} > 5 \iff (x - 1)(x - 4) > 0.$$

Ställ upp en teckentabell:

$x$					
$x - 1$	-	0	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	0	+
$(x - 1)(x - 4)$	+	0	-	0	+

Vi ser att  $0 < x < 1$  och  $x > 4$  löser olikheten. Anta nu att  $x < 0$  då har vi istället

$$x + \frac{4}{x} > 5 \iff (x - 1)(x - 4) < 0.$$

Vi ser att detta endast uppfylls när  $1 < x < 4$  men då vi antagit att  $x < 0$  är detta ingen giltig lösning. Svaret på uppgiften är alltså  $0 < x < 1$  och  $x > 4$ .