Lösningar kapitel 10

Endimensionell analys

Fabian Ågren, π11

Lösta uppgifter

10.1

a)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h}=\lim_{h\to 0}h+2=0+2=2$$

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2a)}{h}=\lim_{h\to 0}h+2a=0+2a=2a$$

10.2

a)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2x+3hx^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2+3hx+3x^2)}{h}=\lim_{h\to 0}h^2+3hx+3x^2=0+0+3x^2=3x^2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x(x+0)}=-\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}\\&=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\ln\left(\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\lim_{h\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\left[\begin{matrix}t=\frac{h}{x}\implies h=tx\\h\to 0\implies t\to 0\end{matrix}\right]\\&=\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{tx}}=\lim_{t\to 0}\ln\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\\&=\left[\begin{matrix}n=\frac{1}{t}\implies t=\frac{1}{n}\\t\to 0\implies n\to\infty\end{matrix}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

10.6

a)

Tangentens ekvation ges av

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

I det här fallet är $f(x) = \cos 2x$ och $a = \frac{\pi}{6}$. Derivatan av f är

$$f'(x) = D\cos 2x = D(2x) \cdot (-\sin 2x) = -2\sin 2x$$

Vi har då

$$y - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \iff y - \cos\frac{\pi}{3} = -2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\iff y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \iff y = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

Normalens ekvation är

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \iff y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \iff y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

10.8

a)

$$D(e^{2x} - \sin 3x) = De^{2x} - D\sin 3x = e^{2x} \cdot D(2x) - \cos 3x \cdot D(3x) = 2e^{2x} - 3\cos 3x$$

b)

$$D(\ln x + \arctan x) = D\ln x + D\arctan x = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 + x^2}$$

c)

$$D(\arcsin 2x + (2x+1)^7) = D\arcsin 2x + D(2x+1)^7 = D(2x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} + D(2x+1)^7$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} + D(2x+1)^7 = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} + D(2x+1) \cdot 7(2x+1)^6$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} + 14(2x+1)^6$$

d)

$$D\left(\tan \pi x + \cos\frac{\pi x}{2}\right) = D\tan \pi x + D\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right) = D(\pi x) \cdot \frac{1}{\cos^2 \pi x} + D\left(\cos\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\cos^2 \pi x} - \sin\frac{\pi x}{2} \cdot D\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos^2 \pi x} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$$

e)

$$D\sqrt{x} = Dx^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

f)

$$D\frac{1}{x} = Dx^{-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

g)

$$D\frac{1}{\sqrt{x}} = D\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = Dx^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^{\frac{1}{2}})^3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}^3} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

10.9

a)

$D(e^{2x}\sin 3x) = D(e^{2x})\cdot\sin 3x + e^{2x}\cdot D\sin 3x = 2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x = e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)$

b)

$$\begin{aligned} D(e^{-x}(x^2+x)) &= D(e^{-x})\cdot(x^2+x) + e^{-x}\cdot D(x^2+x) = -e^{-x}(x^2+x) + e^{-x}(2x+1) \\ &= e^{-x}(-x^2+x+1) \end{aligned}$$

c)

$$D\frac{x}{x+1} = \frac{D(x)(x+1) - xD(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

d)

$$\begin{aligned} D\frac{2x^2+1}{(x+1)^2} &= \frac{D(2x^2+1)\cdot(x+1)^2 - (2x^2+1)\cdot D\left((x+1)^2\right)}{\left((x+1)^2\right)^2} \\ &= \frac{4x(x+1)^2 - (2x^2+1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)\left(2x(x+1) - (2x^2+1)\right)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{2\left(2x(x+1) - (2x^2+1)\right)}{(x+1)^3} = \frac{2(2x-1)}{(x+1)^3} = \frac{4x-2}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

e)

$$D\frac{\ln x}{e^x} = \frac{D(\ln x)\cdot e^x - \ln x\cdot De^x}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot e^x - \ln x\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(\frac{1}{x} - \ln x)}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{e^x}$$

f)

$$D(x\ln|x|) = D(x)\ln|x| + xD\ln|x| = \ln|x| + x\cdot\frac{1}{x} = \ln|x| + 1$$

10.10

a)

$$D(\ln(1+x^2)) = D(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

b)

$$D(\ln x)^2 = D(\ln x) \cdot 2\ln x = \frac{2\ln x}{x}$$

c)

$$De^{-x^2} = D(-x^2) \cdot e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

d)

$$De^{-1/x} = D\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

e)

$$D(\sin\sqrt{x}) = D(\sqrt{x}) \cdot \cos\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos\sqrt{x} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

f)

$$D\sin^3 x = D(\sin x) \cdot 3\sin^2 x = 3\cos x \sin^2 x$$

g)

$$D\tan^2 x = D(\tan x) \cdot 2\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2\tan x = \frac{2\tan x}{\cos^2 x}$$

h)

$$D\arctan\frac{1}{x} = D\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{x^2+1}$$

i)

$$D\arcsin\sqrt{x} = D(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

10.11

a)

$$D\arcsin(e^x) = D(e^x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} = e^x \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

b)

$$De^{\arcsin x} = D(\arcsin x) \cdot e^{\arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{\arcsin x} = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

c)

$$D\sqrt{1-x^2} = D(1-x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = -2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

d)

$$D\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = D(\sqrt{1-x^2})^{-1} = D(\sqrt{1-x^2})\cdot\left(-\sqrt{1-x^2}^{-2}\right) = D(\sqrt{1-x^2})\cdot\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e)

$$D(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = D(1+x^2)\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 2x\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 3x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 3x\sqrt{1+x^2}$$

f)

$$D\arcsin\frac{1}{x} = D\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2(x^2-1)}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

10.12

a)

$$D\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = D(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = (1+D\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \left(1+D(1+x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

b)

$$D\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} = D\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| = D\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = D\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$
$$= \frac{D(x)\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot D\sqrt{1+x^2}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{D(x)\cdot\sqrt{1+x^2}-x\cdot D\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot D(1+x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

c)

$$D \ln|\ln|x|| = D\ln|x| \cdot \frac{1}{\ln|x|} = \frac{1}{x\ln|x|}$$

10.13

a)

$$D\,2^x = D\,e^{\ln 2^x} = D\,e^{x\ln 2} = D(x\ln 2)\cdot e^{x\ln 2} = \ln 2\cdot e^{x\ln 2} = \ln 2\cdot 2^x$$

d)

$$D\,x^x = D\,e^{\ln x^x} = D\,e^{x\ln x} = D(x\ln x)\cdot e^{x\ln x} = D(x\ln x)\cdot x^x = (D(x)\cdot\ln x + x\cdot D\ln x)\cdot x^x$$
$$= (\ln x + x\cdot\frac{1}{x})x^x = (\ln x + 1)x^x$$

10.17

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\,(V(t))^{1.4}\right) = \frac{d}{dt}C \iff p'(t)\,(V(t))^{1.4} + p(t)\cdot V'(t)\cdot 1.4\,(V(t))^{0.4} = 0$$
$$\iff p'(t) = -\frac{p(t)\cdot V'(t)\cdot 1.4\,(V(t))^{0.4}}{(V(t))^{1.4}} = -\frac{p(t)\cdot V'(t)\cdot 1.4}{V(t)}$$

Vi har givet $p = 5$, $V = 56$ och $V' = 4$. Sätt in dessa i ekvationen och räkna ut p'

$$p' = -\frac{5\cdot 4\cdot 1.4}{56} = -0.5$$

Trycket minskar med 0.5 atm/s.

10.18

Ställ upp ett uttryck för det horisontella avståndet l med avseende på tiden, enheten för sträcka är km och enheten för tid är h.

$$l(t) = 15 - vt = 15 - 600t$$

Sambandet mellan vinkeln och det horisontella avståndet är

$$\tan\theta(t) = \frac{5}{l(t)} \iff \theta(t) = \arctan\frac{5}{l(t)}$$

Vi är intresserade av hur snabbt vinkeln ändrar sig så vi deriverar med avseende på tiden

$$\theta'(t) = \frac{d}{dt}\theta(t) = \frac{d}{dt}\arctan\frac{5}{l(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{l(t)}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{5}{l(t)}\right)^2} = -\frac{5l'(t)}{(l(t))^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{5}{l(t)}\right)^2}$$
$$= -\frac{5l'(t)}{(l(t))^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{25}{(l(t))^2}} = -\frac{5l'(t)}{(l(t))^2+25}$$

Vi är intresserade av vinkelns förändring då $t = 0$. Noterar att $l'(t) = -600$. Då får vi $l(0) = 15$ och $l'(0) = -600$. Insatt ger de

$$\theta'(0) = -\frac{5l'(0)}{l(0)^2+25} = -\frac{5\cdot(-600)}{15^2+25} = 12$$

Vinkeln ändrar sig 12 rad/h.

10.19

"Längden ökar med en hastighet proportionell mot längden". Detta kan uttryckas som

$$l' = cl$$

där l är längden och c en konstant. Beteckna cylinderns volym med V och dess radie med r. Sambandet mellan radie, längd och volym är

$$V = \pi r^2 l$$

Derivera volymen med avseende på tiden så erhålls

$$V' = (\pi r^2 l)' = 2\pi r' r l + \pi r^2 l' = 2\pi r' r l + \pi r^2 c l = \pi r l (2r' + rc)$$

Vi antar att volymen är konstant vilket innebär att $V' = 0$. Detta ger

$$V' = 0 \iff \pi r l (2r' + rc) = 0 \iff 2r' + rc = 0 \iff r' = -\frac{c}{2} r$$

Definiera $d = \frac{c}{2}$, då har vi

$$r' = -dr$$

vilket visar att radien minskar med en hastighet proportionell mot radien.

10.24

a)

Se bokens lösning

b)

Derivera f

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Sätt derivatan till noll

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$$

Vi har alltså stationära punkter i $x = -1$ och $x = 1$. Ställ upp teckentabellen

x		-1		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

Här ser vi att $x = -1$ är ett lokalt maximum och $x = 1$ ett lokalt minimum till f.

c)

Derivera f

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2 + x)$$

Sätt derivatan till noll. Notera att $e^x \neq 0$ för alla x.

$$f'(x) = 0 \iff xe^x(2 + x) = 0 \iff x(2 + x) = 0$$

Ekvationen har enligt faktorsatsen lösningarna $x = -2$ och $x = 0$ vilket också är stationära punkter till f. Sätt upp teckentabellen för att bestämma extrempunkter.

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Här ser vi att $x = -2$ är ett lokalt maximum och $x = 0$ ett lokalt minimum till f.

d)

Derivera f

$$f'(x) = 5\cos x(2 + \sin x)^4$$

Sätt nu derivatan till noll. Observera att $-1 \leq \sin x \leq 1$ för alla x vilket medför att $(2+\sin x)^4 \neq 0$ för alla x.

$$f'(x) = 0 \iff 5\cos x(2 + \sin x)^4 = 0 \iff 5\cos x = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Eftersom f är 2π-periodisk räcker det att undersöka stationära punkter i ett intervall av längden 2π. Vi väljer $(-\pi, \pi]$. Ställ upp teckentabellen

x		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	243	$\searrow$

Vi kan dra slutsatsen att $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ är lokala maximipunkter och $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ är lokala minimipunkter.

e)

Först observerar vi att f inte är definierad i $x = \pm 1$. Derivera f

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Sätt derivatan till noll.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \iff x^2(x^2-3) = 0 \iff x^2(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0$$

Ekvationen har enligt faktorsatsen lösningarna $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{3}$ vilket också är de stationära punkterna till f. Ställ upp teckentabellen

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\wr$	$-$	0	$-$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\wr$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

Vi ser att $x = -\sqrt{3}$ är en lokal maximipunkt och $x = \sqrt{3}$ en lokal minimipunkt. $x = 0$ är ingen extrempunkt utan en terasspunkt.

10.25

Här är det bara att gå igenom tabellerna i föregående uppgift. Vi har då för varje uppgift lokala maximivärden a) saknas, b) 2, c) $4e^{-2}$, d) 243 och e) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
De lokala minimivärdena är a) 3, b) -2, c) 0, d) 1 och e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

10.28

a)

Se bokens lösning.

b)

Starta med $x \to \infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = 0 - 1 - 0 = -1$$

och

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1 - 0 = 1$$

Resultatet blir identiskt då $x \to -\infty$ så de sneda asymptoterna till f är

$$y = 1 - x$$

då $x \to \pm\infty$.

c)

Starta med $x \to \infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1} = \frac{2+0}{1} = 2$$

och

$$m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x} - 2x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Resultatet blir identiskt då $x \to -\infty$ så de sneda asymptoterna till f är

$$y = 2x$$

då $x \to \pm\infty$.

10.31

a)

Vi har

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^3 - x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1-0-0}{1-0} = 1$$

och

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 1} - x \right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x - x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-4x^2+4x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x(1-x)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x(1-x)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4x}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{4}{1+0} = -4$$

De sneda asymptoterna är $y = x - 4$ då $x \to \pm\infty$.

b)

Vi har

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\arctan\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\arctan\frac{x}{1-\frac{1}{x}}=0\cdot\arctan\pm\infty=0\cdot\pm\frac{\pi}{2}=0$$

och

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\arctan\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\arctan\frac{x}{1-\frac{1}{x}}$$
$$=\arctan\pm\infty=\pm\frac{\pi}{2}$$

De sneda asymptoterna till f är $y=\frac{\pi}{2}$ då $x\to\infty$ och $y=-\frac{\pi}{2}$ då $x\to-\infty$.

10.32

a)

Vi börjar med att hitta alla extrempunkter. Derivera f

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)^2-x^2 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2x(x+1)-2x^2}{(x+1)^3}=\frac{2x}{(x+1)^3}$$

Sätt derivatan till noll och hitta nollställen

$$f'(x)=0\iff\frac{2x}{(x+1)^3}=0\implies 2x=0\iff x=0$$

Vi har en stationär punkt i $x=0$. Undersök om det är en extrempunkt genom teckentabell

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Vi ser att $x=0$ är en lokal minimipunkt och är alltså en extrempunkt. Vi undersöker nu asymptoter

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{x}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1+0+0}=0$$

och

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+1}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+0+0}=1$$

Vi har en asymptot $y=1$ då $x\to\pm\infty$

10.33

a)

Derivatan av f är

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{4x^2+1}$$

Sätt den till noll och hitta alla nollställen

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{2}{4x^2+1} = 0 \iff 4x^2+1 = 2 \iff x^2 = \frac{1}{4} \iff x = \pm\frac{1}{2}$$

Ställ upp en teckentabell

x		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$

Vi ser att vi har två extrempunkter i $x = \pm\frac{1}{2}$.

b)

Derivatan av f är

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

Sätt derivatan till noll och hitta alla nollställen

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$$

Ställ upp en teckentabell

x		e	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	e	$\nearrow$

Vi ser att $x = e$ är en lokal minimipunkt.

10.34

a)

Derivatan av f är

$$f'(x) = 2x + 2$$

som har nollstället $x = -1$. Vi undersöker nollstället och intervallets ändpunkter genom att sätta in dem i f

$$f(-2) = 0, \quad f(-1) = -1 \quad \text{och} \quad f(1) = 3$$

Vi ser att f antar det minsta värdet -1 och det största värdet 3 på intervallet I.

c)

Derivatan av f är

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$

Derivatans nollställen är $x = 1$. Vi undersöker nollstället och intervallets ändpunkter genom att sätta in dem i f

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{1}{e} \quad \text{och} \quad f(2) = \frac{2}{e^2}$$

Vi ser att f antar det minsta värdet 0 och det största värdet $\frac{1}{e}$ på intervallet I.

10.37

a)

Vi undersöker "ändpunkterna" i intervallet dvs. $x = -\infty$ och $x = \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} x^4 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$$

Observera att detta är ett standardgränsvärde.

$$\lim_{x\to-\infty} x^4 e^{-x} = \begin{bmatrix} t = -x \Longrightarrow x = -t \\ x \to -\infty \Longrightarrow t \to \infty \end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty} t^4 e^t = \infty$$

Vi undersöker eventuella extrempunkter också

$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3 e^{-x}(4 - x)$$

Derivatan har nollställen i $x = 0$ och $x = 4$. Vi ställer upp en teckentabell

x		0		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{256}{e^4}$	$\nearrow$

Vi ser här att funktionen har två extrempunkter i $x = 0$ och $x = 4$. Funktionen antar ett minsta värde 0 i $x = 0$ och ett största värde saknas.

10.38

Eftersom funktionerna är kontinuerliga så antar de alla värden mellan minsta och största värde.

a)

Här var minsta värde -1 och största värde 3. Värdemängden är då $[-1, 3]$.

c)

Här var minsta värde 0 och största värde e^{-1}. Värdemängden är då $[0, e^{-1}]$.

10.39

Här saknades minsta värde och största värde var $27e^{-3}$. Värdemängden är då $[-\infty, 27e^{-3}]$.

10.40

Volymen av en cylinder ges av

$$V = \pi r^2 h$$

där r är cylinderns radie och h är höjden. Arean av burken ges av

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Det är arean vi vill minimera. För att få arean som en funktion av en variabel löser vi ut h ur volymekvationen ovan

$$V = \pi r^2 h \Longleftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Ersätt h i areaekvationen så erhålls

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{V}{\pi r^2} \right) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Derivera arean med avseende på radien

$$A' = 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

Vi letar efter extrempunkter så vi sätter derivatan till noll och tar fram nollställena

$$A' = 0 \Longleftrightarrow \frac{2\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0 \Longleftrightarrow 2\pi r^3 - 2V = 0 \Longleftrightarrow r^3 = \frac{V}{\pi} \Longleftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Ställ upp en teckentabell för att undersöka punkten

r		$\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$	
$A'(r)$	$-$	0	$+$
$A(r)$	$\searrow$		$\nearrow$

Vi ser att $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ är en lokal minimipunkt och då vi har som minst materialåtgång. Slutligen undersöker vi vad höjden är vid denna radie

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \right)^2} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{V}{\pi} \left(\frac{V}{\pi} \right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{V}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

10.42

Vi använder samma beteckningar som i tipset till uppgiften. Vi vill alltså minimera f vilket vi gör genom att derivera

$$f'(x) = 2 \left((16 + x^2)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{16 + x^2}} - 1 \right) + (16 + x^2)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{16 + x^2}} + 1$$

$$= 2 \left(\frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} - 1 \right) + \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}} + 1 = \frac{3x}{\sqrt{16 + x^2}} - 1$$

Hitta derivatans nollställen

$$f'(x) = 0 \iff \frac{3x}{\sqrt{16+x^2}} - 1 = 0 \iff 3x = \sqrt{16+x^2} \implies (3x)^2 = 16 + x^2 \iff$$

$$8x^2 = 16 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

Sätt i lösningarna i derivatan så upptäcks att $x = -\sqrt{2}$ är en falsk rot. Således är $x = \sqrt{2}$ den enda punkt vi behöver kolla. Funktionen f är kontinuerlig så vi behöver bara kolla definitionsmängdens ändpunkter och den stationära punkten för att hitta ett minimum.

$$f(-16) \approx 129,5, \quad f(\sqrt{2}) \approx 75,3 \quad \text{och} \quad f(24) \approx 113$$

Vi ser att $x = \sqrt{2}$ minimerar funktionen. Svaret på uppgiften är alltså att anslutningsvägen ska byggas från en punkt $24 - \sqrt{2}$ km rakt norr om A.

10.44

Avståndet (d) från en punkt (x, y) till origo erhålls genom pythagoras sats och är i vårt fall

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1-x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Vi deriverar avståndet med avseende på x

$$d'(x) = (4x^3 - 2x)\frac{1}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

Vi hittar nollställen till d'

$$d'(x) = 0 \iff \frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = 0 \iff x(2x^2-1) = 0 \iff x(x\sqrt{2}+1)(x\sqrt{2}-1) = 0$$

som enligt faktorsatsen har nollställena $x = 0$ och $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom d är kontinuerlig så hittar vi minimum genom att undersöka de stationära punkterna och funktionens ändpunkter vilka är $-\infty$ och ∞.

$$f(-\infty) = \infty, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad f(0) = 1, \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad f(\infty) = \infty$$

Vi ser att $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ är funktionens minimum. Motsvarande y-värde är

$$y = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

10.45

Kalla tangeringspunkten för (a, e^{-a}), $a \geq 0$. Tangentens lutning (k) ges av derivatan i punkten $x = a$ dvs.

$$k = y'(a) = -e^{-a}$$

Tangentens m-värde får vi genom att lösa ekvationen

$$y = kx + m \iff e^{-a} = -ae^{-a} + m \iff m = e^{-a}(1+a)$$

Tangentens ekvation ges alltså av

$$y = e^{-a}(-x + 1 + a)$$

Tangenten skär x-axeln i $(1 + a, 0)$ och y-axeln i $(0, e^{-a}(1 + a))$. Triangelns area ges därför av

$$A = \frac{e^{-a}(1 + a)^2}{2}$$

Vi deriverar arean för att maximera den

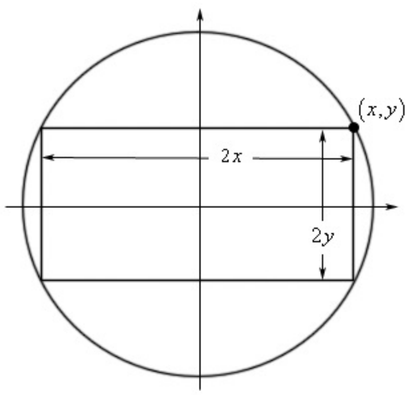
$$A' = \frac{-e^{-a}(1 + a)^2 + 2e^{-a}(1 + a)}{2} = \frac{e^{-a}(1 + a)(1 - a)}{2}$$

Derivatan har nollställen i $\pm a$ men vi är bara intreserade av icke negativa värden på a så vi håller oss till $a = 1$. Eftersom A är kontinuerlig kan vi hitta maximum genom att undersöka stationära punkter och ändpunkterna i definitionsmängden

$$A(0) = \frac{1}{2}, \quad A(1) = 2e^{-1} \quad \text{och} \quad A(\infty) = 0$$

Vi ser här att triangeln blir som störst då $a = 1$ med arean $2e^{-1}$.

10.50



Vi inför ett koordinatsystem med origo i mitten av cirkeln som i figuren ovan. Med systemet blir rektangelns bredd $2x$ och dess höjd $2y$. Om vi låter punkten (x, y) ligga på cirkelns högra övre del (så som i figuren) så kan y uttryckas i x genom cirkelns ekvation

$$r^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

med begränsningarna $0 < x < r$ och $0 < y < \sqrt{r^2 - x^2}$. Vi uppdaterar nu W med de nya beteckningarna

$$W = \frac{(2x)(2y)^2}{6} = \frac{4xy^2}{3} = \frac{4x\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2}{3} = \frac{4x(r^2 - x^2)}{3}$$

Vi är ute efter att maximera W så vi deriverar

$$W'(x) = \frac{4(r^2 - 3x^2)}{3}$$

Vi hittar alla nollställen till W'

$$W'(x) = 0 \iff \frac{4(r^2 - 3x^2)}{3} = 0 \iff r^2 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{r^2}{3} \iff x = \pm\frac{r}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}r$$

Av dessa lösningar är det $x = \frac{\sqrt{3}}{3}r$ som ligger inom det sökta intervallet. Det är lätt att kontrollera att detta är den mest optimala lösningen. Eftersom W är kontinuerlig räcker det med att kontrollera de stationära punkterna och ändpunkterna i definitionsmängden för att avgöra optimum. Eftersom $W(0) = 0$, $W(r) = 0$ och $W\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right) > 0$. Motsvarande y-värde är

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{3}r^2} = \sqrt{\frac{2}{3}r^2} = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}r^2} = \sqrt{\frac{6}{9}r^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}r$$

Slutligen får vi inte glömma bort att bredden och höjden av rektangeln ges av $2x$ respective $2y$ så att slutresultatet blir

$$2x = 2\frac{\sqrt{3}}{3}r \quad \text{och} \quad 2y = 2\frac{\sqrt{6}}{3}r$$

10.69

Antag att f är deriverbar. Då är derivatan

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Eftersom vi antagit att funktionen är deriverbar ska det gälla att vänsterderivatan är lika med högerderivatan i varje punkt. Speciellt i fallet då $x = 1$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \iff 2 \cdot 1 + a = 1 \iff a = -1$$

Om en funktion är deriverbar i en punkt så medföljer det också att den är kontinuerlig där dvs.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \iff \lim_{x\to 1^-} x^2 - x + b = \lim_{x\to 1^+} x + 2 \iff 1^2 - 1 + b = 1 + 2 =\iff b = 3$$

10.72

$$\begin{aligned} Df(x) &= D(\arctan(e^x) + \arctan(e^{-x})) = D\arctan(e^x) + D\arctan(e^{-x}) \\ &= D(e^x)\cdot\frac{1}{1+(e^x)^2} + D(e^{-x})\cdot\frac{1}{1+(e^{-x})^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} \\ &= \frac{e^x(1+e^{-2x})}{(1+e^{2x})(1+e^{-2x})} - \frac{e^{-x}(1+e^{2x})}{(1+e^{2x})(1+e^{-2x})} = \frac{e^x(1+e^{-2x}) - e^{-x}(1+e^{2x})}{(1+e^{2x})(1+e^{-2x})} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} - e^{-x} - e^x}{(1+e^{2x})(1+e^{-2x})} = \frac{0}{(1+e^{2x})(1+e^{-2x})} = 0 \end{aligned}$$

10.73

a)

$$D\frac{x}{x+1} = \frac{D(x)(x+1) - xD(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

b)

$$D(e^{\frac{x^2}{1+x}}) = D\left(\frac{x^2}{1+x}\right)\cdot e^{\frac{x^2}{1+x}} = \frac{D(x^2)(1+x) - x^2D(1+x)}{(1+x)^2}\cdot e^{\frac{x^2}{1+x}}$$
$$= \frac{2x(1+x) - x^2\cdot 1}{(1+x)^2}\cdot e^{\frac{x^2}{1+x}} = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2}\cdot e^{\frac{x^2}{1+x}}$$

c)

$$D\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+12x+10}} = \frac{D(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+10} - (2x+3)D(\sqrt{4x^2+12x+10})}{\sqrt{4x^2+12x+10}^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{4x^2+12x+10} - (2x+3)D(4x^2+12x+10)\frac{1}{2\sqrt{4x^2+12x+10}}}{4x^2+12x+10}$$
$$= \frac{2\sqrt{4x^2+12x+10} - (2x+3)(8x+12)\frac{1}{2\sqrt{4x^2+12x+10}}}{4x^2+12x+10}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2+12x+10}}{\sqrt{4x^2+12x+10}}\cdot\frac{2\sqrt{4x^2+12x+10} - (2x+3)(8x+12)\frac{1}{2\sqrt{4x^2+12x+10}}}{4x^2+12x+10}$$

$$= \frac{2(4x^2+12x+10) - \frac{1}{2}(2x+3)(8x+12)}{(4x^2+12x+1)\sqrt{4x^2+12x+10}} = \frac{2(4x^2+12x+10) - \frac{1}{2}(2x+3)(8x+12)}{(4x^2+12x+10)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{2\left((2x+3)^2+1\right) - \frac{1}{2}(2x+3)(8x+12)}{(4x^2+12x+10)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\left((2x+3)^2+1\right) - 2(2x+3)^2}{(4x^2+12x+10)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(4x^2+12x+10)^{\frac{3}{2}}}$$

d)

$$D\left((x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right) = D(x^2+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\cdot D(x^2+1)\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\cdot 2x\cdot(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = 3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

10.79

a)

Tangentens ekvation ges av

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

I vårt fall har vi $f(x) = \ln\sqrt{x}$ och $a = 1$. Vi börjar med att derivera

$$f'(x) = D\ln\sqrt{x} = D\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Vi kan nu få fram tangentens ekvation

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \iff y - \ln\sqrt{1} = \frac{1}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}}(x-1) \iff y = \frac{1}{2}(x-1)$$

b)

Samma tillvägagångssätt. Nu är $f(x) = 2^{-x}$ och $a = 0$ Vi deriverar

$$f'(x) = D2^{-x} = De^{\ln 2^{-x}} = De^{-x\ln 2} = D(-x\ln 2)e^{-x\ln 2} = D(-x\ln 2)2^{-x} = -\ln(2)2^{-x}$$

Tangentens ekvation är då

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 2^{-0} = -\ln(2)2^{-0}x \iff y - 1 = -\ln(2)x \iff y = -\ln(2)x + 1$$

10.80

Tangentens ekvation ges av

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

I vårt fall har vi $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ och $a = 0$. Vi börjar med att derivera

$$f'(x) = D\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = D(x+\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \left(1 + D\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \left(1 + D(1+x^2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Tangentens ekvation blir

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \iff y - 0 = 1\cdot(x-0) \iff y = x$$

Normalens ekvation är

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a) \iff y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}(x-0) \iff y - 0 = -\frac{1}{1}x \iff y = -x$$