# Egenvärde

Def. A = kvadratisk matris
Talet $\lambda$ kallas ett egenvärde till A om det finns en vektor $\underline{X} \neq 0$ så:

$$A\underline{X} = \lambda \underline{X}$$

$\underline{X}$ kallas egenvektor till A motsvarande (hörande till) egenvärdet $\lambda$.

Anm. a) $A\underline{X} = \lambda \underline{X}$
Löses alltid a $\underline{X} = 0$.
$\underline{X} = 0$ uteslutas med flit som egenvektor!!!

b) $\underline{X}$ egenvekt. till A hörande till egenvärdet $\lambda$.
$(t \neq 0)$ $\tilde{\underline{X}} = t\underline{X}$ är också egenvektor till A hörande till egenvektorsvärdet $\lambda$.

$$A\tilde{\underline{X}} = A(t\underline{X}) = t(A\underline{X}) = t(\lambda \underline{X}) = \lambda \tilde{\underline{X}}.$$

Ex (forts.) (har inte skrivit första delen av ex!)

Låt oss beräkna egenvärden och egenvektorerna till

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Lösning. Söker $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{X} \neq 0$ så

$A\underline{X} = \lambda \underline{X}$, $\underline{X} \neq 0 \iff \lambda I \underline{X} - A\underline{X} = 0$, $\underline{X} \neq 0$
$\iff (\lambda I - A)\underline{X} = 0$, $\underline{X} \neq 0 \iff \det(\lambda I - A) = 0$

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5\lambda-3 & -4 \\ -4 & 5\lambda+3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{5^2}\begin{vmatrix} 5\lambda-3 & -4 \\ -4 & 5\lambda+3 \end{vmatrix} = \frac{1}{5^2}(25\lambda^2 - 25) =$$

$$= \lambda^2 - 1 \iff \lambda = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$\lambda = 1$ $(\lambda I - A)X = 0 \iff (I - A)X = 0$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = t \end{cases}$$

egenvektorn $X = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = tv,\ t \neq 0$

$\lambda = -1$ $(\lambda I - A)X = 0 \iff (-I - A)X = 0$

$$\Rightarrow X = t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = tN,\ t \neq 0$$

Def $A$ = $n \times n$-matris

$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

polynom av grad $n$.

Karakterisk(a) polynom för $A$.

Ekv. $p_A(\lambda) = 0$ kallas karakteristiska ekv.

sekularekvationen.

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{e}_2$$

$$\hat{e}_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{e}_2$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = S^{-1}AS = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}\hat{X} = \hat{Y}$$

Def (3', s247)

A kvadratisk ordn. $n$

A sägs vara <u>diagonaliserbar</u> om det finns inverterbar matris.

$S$ och en diagonal-matris $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$ så att:

$$S^{-1}AS = D$$

Sats

Om $S^{-1}AS = D$, $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

så är $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

Bevis.

$$S^{-1}AS = D \Longleftrightarrow A = SDS^{-1} \Longrightarrow \det A = \det SDS^{-1}$$

$$= \det S \det D \det S^{-1} = \det S \det D \frac{1}{\det S} = \det D$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

$\square$

$$A^n = (SDS^{-1})^N = S D \underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I} D \underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I} D S^{-1} = S D^N S^{-1}$$

---

Sats (2, s248)

A: $n \times n$ - matris

A diag.-bar $\Updownarrow$

A har n st linj. obek. egenvektorer.

Ex:

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är inte diag-bar!

---

Sats (3, s253)

$p_A(\lambda)$ har n olika rötter

$\Downarrow$

A diag-bar

---

Lemma $A\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \neq 0$

i) $\underbrace{cA}_{B}$ $\quad B\mathbf{X} =$

$(cA)\mathbf{X} =$

$c(A\mathbf{X}) =$

$c(\lambda\mathbf{X}) =$

$(c\lambda)\mathbf{X}$.

ii) $(A + cI)\mathbf{X} =$

$=$