

Dubbelintegraler!

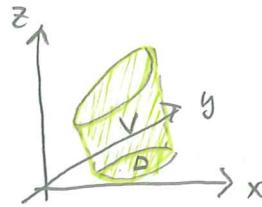
Vi vill beräkna volymen "under" en funktionsytta.

Enklaste fallet:

funktionen = konstant,

D är en rektangel

⇒ Volymen av en låda
kan beräknas.



Nästa steg:

Rektangeln kan delas in i mindre
rektanglar i vilka fär konstant

Vi tår en trappfunktion.

konstant på små intervall

⇒ Volymen kan beräknas.

ändlig summa av rätblock.

Vi definierar dubbelintegralen av trappfunktionen

$$\Phi(x,y) := \iint_D \Phi(x,y) dx dy, \text{ som motsvarande volym}$$

Låda under xy-planet ger negativt
bidrag till volymen.

Vi säger att godtycklig funktion f är
integrerbar om det finns trappfunktioner

Φ och Ψ , $\Phi \leq f \leq \Psi$, så att skillnaden

$\iint_D \Psi(x,y) dx dy - \iint_D \Phi(x,y) dx dy$ blir godtyckligt liten.

Då finns det ett entydigt tal λ med

$\iint_D \Phi(x,y) dx dy \leq \lambda \iint_D \Psi(x,y) dx dy$ för alla $\Phi \leq f \leq \Psi$.

Def: $\lambda = \iint_D f(x,y) dx dy$ integralen av f över D .

Vi har räknelagarna i sats 7.4

Gäller eftersom de gäller för trappfunktion

HUR BERÄKNAR VI DUBBELINTEGRLER?

Endnu: "Somma av oändligt många
oändligt smala bitar."

Sliva bröd

Sidan 223

Vi beräknar volymer som summer av
volymskivor parallella med yz -planet

Om tjockleken blir dx blir

Volymbiten $dV \approx A(x) dx$



⇒ Hela volymen: $V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x) dx$ (skivformeln)

För varje x beräknas $A(x)$ som enkelintegral i y -led:

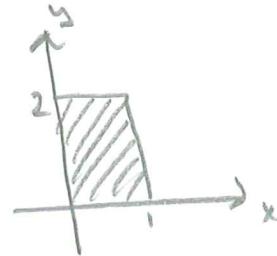
$A(x) = \int_c^d f(x,y) dy$. Vi får sats 7.3:

$$V: \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

Först med avseende på
 y och sedan på x .

två enkelintegraller
efter varandra.

Ex. $I = \iint_D x^3 y^2 dx dy$, D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$



Lösning: $\int_0^1 \left(\int_0^2 x^3 y^2 dy \right) dx$

$$= \int_0^1 \left[x^3 \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^1 \frac{8}{3} x^3 dx = \frac{8}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

I bland blir primitiven enklare med avseende på en av variablerna.

Vi har lyckats integrera två funktioner, så dessa verkar vara integrerbara,

Sats 7.2

Kontinuerlig och kompakt! Rimligt!

• vi kan flytta ut konstanta saker!

Ex. $\iint_D x y e^{-x^2-y^2} dx dy$ D: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{-x^2} \cdot y e^{-y^2} dy \right) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} \left(\int_0^1 y e^{-y^2} dy \right) dx$$

konstant
map y

$$= \int_0^1 y e^{-y^2} dy \cdot \int_0^1 x e^{-x^2} dx = I_1 \cdot I_2$$

$$I_1 = I_2 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

$$\Rightarrow I = I_1 \cdot I_2 = \boxed{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{e} \right)^2}$$

Integration över "godtyckliga" områden

Läs: ej rektanglar.

Vi gör "som vanligt" men vi måste beskriva området m. h. a. integrationsgränserna.

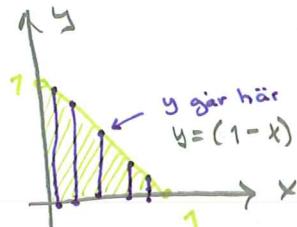
Ex.

$$I = \iint_D \frac{y}{1+x} dx dy, \quad D \text{ triangeln höör i } (0,0), (0,1), (1,0)$$

Lösning: Rita!

Om y först så shall y gå mellan 0 och $(1-x)$

Sedan x från 0 till 1



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{y}{1+x} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x} \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1(1-x)^2}{2(1+x)} dx$$

Polyonom dividera!
REPETERA

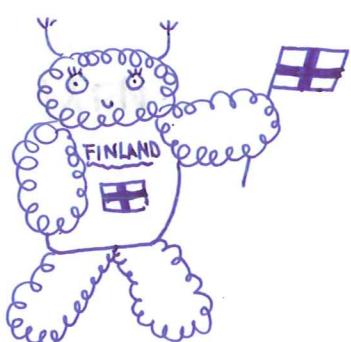
$$= \left[\frac{1}{2} \left(x - 3 + \frac{4}{x+1} \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln |x+1| \right]_0^1$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{5}{4}$$

Alternativet

Om x först:

$$\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{y}{1+x} dx \right) dy$$



Går ina att ta
och dela på
Det är inte den
ute efter!!!
hela kvarteren
trå. PGA
i zir

FINLAND ÄR FINLAND
OCH FINLAND ÄR BRA!

$$\boxed{tx} \quad I = \iint_D xy \, dy \, dx, \quad D: x^2 \leq y \leq x$$

$$\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x xy \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{24}}$$

