Missade föreläsning om kap. 4,4

Differentialer

Om $f(x,y)$ differentierbar i (a,b) så gäller

$$\underbrace{f(a+h,b+k)-f(a,b)}_{\Delta f}=\underbrace{f'_x(a,b)h+f'_y(a,b)\cdot k}_{df}+\sqrt{h^2+k^2}\,\underbrace{\rho(h,k)}_{\to 0}$$

då $h,k\to 0,0$

df är differentialen av f i (a,b).

Linjär funktion av (h,k)

lätt ♡

$$\boxed{df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

Den verkliga skillnaden Δf kan approximeras av det linjära uttrycket df

$df\approx\Delta f$ då $\left.\begin{matrix}h,k\\ dx,dy\end{matrix}\right\}$ litet.

Ex.

$$f(x,y)=\ln|x^2+xy|\Rightarrow \boxed{df=\frac{2x+y}{x^2+xy}dx+\frac{x}{x^2+xy}dy}$$

Vi undersöker $(x,y)=(2,1)$ och $(h,k)=(0{,}01\,,0{,}03)$

Verklig skillnad:

$\Delta f=f(2{,}01,1{,}03)-f(2,1)$:

$=\ln(2{,}01^2+2{,}01\cdot1{,}03)-\ln(6)\approx 0{,}0182$ (Miniräknaren)

Differentialen: (Lättare att beräkna)

$$df=\frac{5}{6}\cdot0{,}01+\frac{2}{6}\cdot0{,}03=\frac{11}{6}\cdot0{,}01$$

$\approx 0{,}0183$

! Vi har en bra approximation!

Ex: Termodynamik

Studera $f(P,V,T) = \frac{PV}{T}$ (Trycket, Volymen, Temperaturen)

Differentialen

$$df = \frac{\partial f}{\partial P}dP + \frac{\partial f}{\partial V}dV + \frac{\partial f}{\partial T}dT = \boxed{\frac{V}{T}dT + \frac{P}{T}dV - \frac{PV}{T^2}dT}$$

För ideal gas gäller (enligt gaslag)

$$\boxed{f(P,V,T) = \frac{PV}{T} = \text{konstant}} \Rightarrow df = 0$$

Vi får

$$\boxed{\frac{V}{T}dP + \frac{P}{T}dV - \frac{PV}{T^2}dT = 0}$$

vilket blir sambandet mellan dP, dT, dV.

Läs om feluppskattning i boken

Högre derivator

Endim: En andra derivata

Nu: Flera partiella derivator $\Rightarrow$ Flera olika sätt att beräkna / kombinera de partiella derivatorna.

Ex: $f(x,y) = x^4y^3 + \sin(x+2y)$ — Alla derivator t.o.m. ordning 2.

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 4x^3y^3 + \cos(x+2y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 3x^4y^2 + 2\cos(x+2y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = 12x^2y^3 - \sin(x+2y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = 6x^4y - 4\cos(x+2y)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f''_{xy} = 12x^3y^2 - 2\sin(x+2y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f''_{yx} = 12x^3y^2 - 2\sin(x+2y)\end{aligned}\right\}\text{Lika!}$$

Blir alltid så! WOW

Likheten är ingen tillfällighet!

Sats 4.10

$f(x,y)$ måste vara 2ggr partiellt deriverbara, kontinuerliga andraderivator

$$\boxed{f''_{xy} = f''_{yx}}$$

Ex: $h(x,y) = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *

rör oss i cirklar

Uttryck $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ i r och "r-derivator"

Lösning:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = f'(r) \cdot \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r) \cdot \frac{x}{r}\right) = f''(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + f'(r) \cdot \frac{1 \cdot r - x \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}$$

$$= f''(r)\frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} + f'(r) \cdot \frac{r - x\frac{x}{r}}{r} = f''(r)\frac{x^2}{r^2} \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

pga symmetri!

kolla upp på *!

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f''(r)\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f''(r)\frac{x^2+y^2}{r^2} + f'(r)\frac{r^2 - x^2 + r^2 - y^2}{r^3} = \boxed{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)}$$

<u>Ex:</u> Lös den partiella differentialekvationen

Kolla i hans anteckningar!

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Variabelbyte: $\begin{cases} u = x^2 + y \\ v = x \end{cases}$

Gradienter är alltid vinkelrät mot nivåkurvan