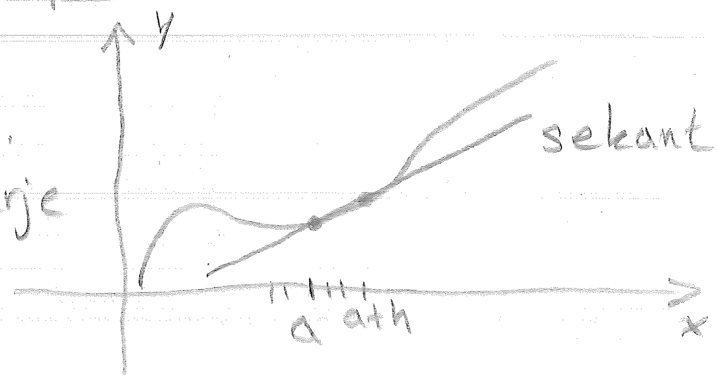
Derivator

Defn. Antag att f är defn i en omgivning av punkten a.
Om differenskvoten $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ har ett gränsvärde (i $\mathbb{R}$) då $h \to 0$ så säger vi att f deriverbar i a.

lutning för sekant genom $(a, f(a))$ och $(a+h; f(a+h))$

Gränsvärdet $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ kallas derivatan av f (i punkten a) och betecknas $f'(a)$.



Om f är deriverbar i varje punkt i D_f så säger vi att f är deriverbar.
Funktionen $D_f \ni x \mapsto f'(x) \in \mathbb{R}$ kallas derivatan av f.
Notationer:

$$\left.\begin{matrix} f' \\ \frac{d}{dx}f \\ Df \end{matrix}\right\} \text{ Derivatan av } f \text{ med avseende på } x.$$

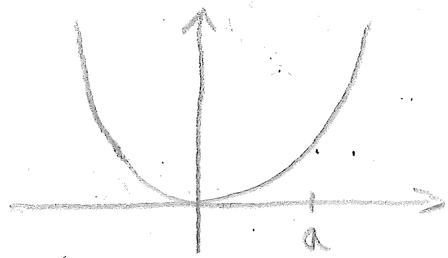
Gränsvärdet $f'(a)$ är lutningen för tangenten till kurvan $y=f(x)$ i punkten $(a, f(a))$.
Enpunktsformen ger att

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$ Tangent

$y-f(a)=\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ Normal

$f'(a) \neq 0$

Ex 1 $f(x)=x^2$

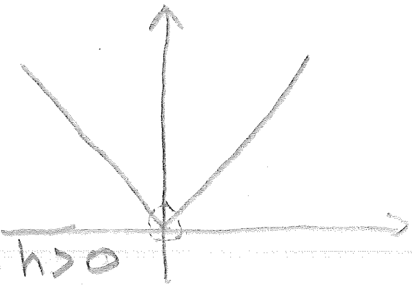


$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} =$$

$$= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h \to 2a \text{ då } h \to 0$$

$f'(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$

Ex 2 $f(x)=|x|$ der. för $x \neq 0$ ✓
der. i $x=0$?



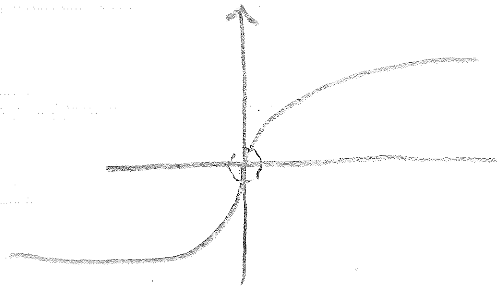
$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{då } h>0 \\ -1 & \text{då } h<0 \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h}$$

$f(x)$ ej der. i $x=0$.

Ex 3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x<0 \end{cases}$

der. i $x=0$?



$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \frac{\sqrt{h}}{h} & \text{då } h>0 \\ \frac{-\sqrt{-h}}{h} & \text{då } h<0 \end{cases}$$

$\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty$ då $h \to 0^+$

$t=-h$

$\frac{-\sqrt{t}}{-t} = \frac{\sqrt{t}}{t} \to +\infty$ då $h \to 0^-$

Kolla upp sats 10.1, 2, 3, 4, 5!

Bevis (Sats 10.1)

Vi vet att $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a) \in \mathbb{R}$ då $h \to 0$

och kommer att visa att $f(a+h) \to f(a)$ då $h \to 0$

$\lim_{x \to a} f(x) = fa$

Vi har:

$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h$

$\to f'(a) \cdot 0 = 0$ då $h \to 0$

Så $f(a+h) - f(a) \to 0$ då $h \to 0$

Dvs. f är <u>kont.</u> i $x = a$. $\square$

Bevis (10.3 i sats 10.2)

Vi har $\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$

$= f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$f(x) \quad g'(x) \quad g(x) \quad f'(x)$ då $h \to 0$

ty f är kont i x

Ex derivata.

$$f(x) = x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot 2x \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$$

Föreläsning 7/10-14

- Derivator
- Implicit derivering
- Stationära punkter
- Extrempunkter
- Bevis av sats 10.8
- l'Hospitals regel