Ortogonala matrisen

ONB $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_4$ i $\mathbb{R}^n$

def $\Updownarrow$ $\qquad \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

$|\bar{e}_1| = 1, \ |\bar{e}_2| = 1, \dots \ |\bar{e}_4| = 1$

$\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0, \ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_3 = 0, \dots, \bar{e}_1 \bar{e}_4 = 0$

$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 = 0, \quad \bar{e}_2 \cdot e_4 = 0$

$e_{n-1} \cdot e_4 = 0$

Basbyten mellan ONB

$\bar{e}_1 \bar{e}_2 e_3$ och $\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$

$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3$
$= \hat{x}_1 \hat{e}_1 + \hat{x}_2 \hat{e}_2 + \hat{x}_3 \hat{e}_3$

(sats 4, kap 4)

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \bar{u} \cdot \hat{e}_3 = \hat{E}_1^T X \\ \hat{x}_2 = \bar{u} \cdot \hat{e}_2 = \hat{E}_2^T X \\ \hat{x}_3 = \bar{u} \cdot \hat{e}_3 = \hat{E}_3^T X \end{cases}$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{matrix} X = Q\hat{X} \\ \hat{X} = Q^{-1} X \end{matrix}}$$

$\hat{E}_1$ koord för $\hat{e}_1$ i $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$
$\hat{E}_2$ — II — $\hat{e}_2$ — II —
$\hat{E}_3$ — II — $\hat{e}_3$ — II —

$Q = (\hat{E}_1 \ \hat{E}_2 \ \hat{E}_3)$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{E}_1^T X \\ \hat{E}_2^T X \\ \hat{E}_3^T X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{E}_1^T \\ \hat{E}_2^T \\ \hat{E}_3^T \end{pmatrix} X =$$

$$= \underbrace{(\hat{E}_1 \hat{E}_2 \hat{E}_3)}_{Q}{}^T X = Q^T X$$

$\hat{X} = Q^T X$

$Q^{-1} = Q^T$ då Q är basbytes-matrisen mellan två ONB

def. En kvadratisk matris:
$Q = [Q_1 Q_2 \dots Q_n]$ kallas en ortogonal matris
om kolonvektorerna $Q_1, Q_2, \dots, Q_4 \in \mathbb{R}$ är en ONB

$$Q_2^T Q_1 = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Sats (7, s.139)
Följande villkor är ekvivalenta
(i) $Q = [Q_1 Q_2 \dots Q_4]$ är ortogonal
(ii) $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ är en ONB
(iii) Radvektorerna i Q är en ONB.
(iv) $Q^T Q = I$
(v) $Q Q^T = I$
(vi) $Q^{-1} = Q^T$

ex. (8, s.138)

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Leontieffs modell

S = Snickare E = Elektriker R = Rörmokare

	HusS	HusE	HusR	
S	2	3	5	10
E	4	4	2	10
R	4	6	0	10
	10	13	7	

Hitta dagslönen:

s = Snickarens dagslön

e =

r =

Varje persons intäkt = utgiften till renoveringen av personens ins.

$$\begin{cases} 2s + 4e + 4r = 10s \\ 3s + 4e + 6r = 10e \\ 5s + 2e + 0r = 10r \end{cases} \Leftrightarrow A\bar{X} = 10\bar{X} \Leftrightarrow A\bar{X} - 10\bar{X} = 0 \Leftrightarrow A\bar{X} - 10 \cdot I\bar{X} = 0 \Leftrightarrow (A - 10I)\bar{X} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} s \\ e \\ r \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & -6 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & -10 & 0 \end{array}\right) \xleftrightarrow{\text{Gaussa}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi får en param. lösning

$$\bar{X} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$